әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті

ӘОЖ 531/534 (043) Қолжазба құқығында

БИЖАНОВА САЛТАНАТ БАГДАТҚЫЗЫ

Массасы мен өлшемі айнымалы өстік симметриялы дененің бейстационар центрлік өрістегі ілгерілемелі-айналмалы қозғалысы

6D060300 – Механика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілері
физика-математика
ғылымдарының докторы,
профессор Минглибаев М.Дж.

физика-математика
ғылымдарының докторы,
профессор Прокопеня А.Н.
(Warsaw University of Life
Sciences, Warsaw, Poland)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2024

МАЗМҰНЫ

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

P_1, P_2	массалары айнымалы денелер
m_1, m_2	P_1, P_2 денелерінің айнымалы массалары
m_{10}, m_{20}	t_0 уақыттың бастапқы мезетіндегі P_1, P_2 денелердің массалары
A, B, C	екі өсті дененің бас инерция моменттері
k_c	сығылу коэффициенті
U	күштік функция
f	гравитация тұрақтысы
T	кинетикалық энергия
$\tilde{m}$	келтірілген масса
$a, e, \omega, \Omega, i, \phi(\tau)$	орбита элементтер аналогтары
a	үлкен жарты өс аналогы
e	эксцентриситет аналогы
ω	перицентр аргументінің аналогы
Ω	жарқырау түйіні бойлығының аналогы
i	көлбеулік аналогы
$\phi(\tau)$	$\left[\gamma(t)\right]^{-2}$ функциясының алғашқы функциясы
π	перицентр бойлығы
n	Кеплерлік орташа қозғалыстың аналогы
L, G, H, l, g, h	Делоне элементтер аналогтары
L', G', H', l', g', h'	Андуайе элементтер аналогтары
$M_\odot$	Күн массасы
$M_\oplus$	Жер массасы
$M_{Ю}$	Юпитер массасы

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы

Классикалық аспан механикасында нақты аспан денелері массасы тұрақты материалдық нүкте (сфералық симметриялы дене) арқылы модельденеді. Мұндай сипаттама нақты физикалық есептің мәнін адекватты түрде көрсетпейтін жағдайларда аспан денелері тұрақты көлемдегі, массасы және құрылымы өзгермеген қатты дене арқылы модельденеді. Кез келген қатты дененің қозғалысы теориялық механикадан белгілі болғандай, өзінің масса центрінің (инерция центрінің) ілгерілемелі қозғалысынан және инерция центрінің төңірегіндегі айналмалы қозғалысынан тұрады. Аспан механикасының классиктері (И. Ньютон, Л. Эйлер, Ж. Лагранж және басқалар) аспан денелерінің ілгерілемелі және айналмалы қозғалысына есептер шығарудағы шектеулерді білген және ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын зерттеу қажет екенін бірнеше рет атап көрсеткен. Абсолютты қатты аспан денелерінің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының қазіргі теориясы классикалық және аспан механикасының, сонымен қатар космодинамиканың негізгі салаларының бірі болып табылады.

Өзара гравитацияланатын қатты аспан денелерінің ілгерілемелі-айналмалы қозғалыстарының теориясы – теориялық және аспан механикасының қазіргі ірі бөлімдерінің бірі. Оның ерекшелігі денелердің ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстарының өзара әсерін ескере отырып қарастырылуында. Бұл теорияның негізгі мәселелерінің бірі – екі қатты дене қозғалысының мәселесі. Екі дене мәселесінің кеңістіктіктегі дербес шешімдерін алғаш Г.Н. Дубошин [1-3] алған және олар «жебе», «қалтқы», «сырық» деп аталған. Ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс мәселелерін қатаң аспан-механикалық тұжырымдаумен қатар жасанды аспан денелерінің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының теориясы жасалды. Бұл бағыттағы жұмыстарды В.В. Белецкий [4-6], Ф.Л. Черноусько [7] және В.А. Сарычев [8] зерттеген. Бұл жұмыстар шын мәнінде аспан денелерінің және жалпы Жердің жасанды серіктерінің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысы мәселесін белсенді зерттеудің бастамасы болды. В.В. Видякин [9-12], Ю.В. Баркин [13-17], С.Г. Журавлев [18-20] және Қазақстан ғалымдары Ж.С. Ержанов [21-23], А.А. Калыбаев [24], А.А. Баймухаметов және олардың шәкірттері аспан денелерінің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысы теориясын ауқымды түрде зерттеген. Ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс теориясының жетістіктері Ю.В. Баркин, С.Г. Журавлев, В.В. Видякин, В.Г. Демин [13] және А.А. Петруцкийдің [18,19] жұмыстарында көрсетілген.

Қазіргі бақылау астрономиясы нақты аспан денелерінің абсолютты қатты дене емес – олар бейстационар екендігін [25-32], олардың массалары, өлшемдері, пішіні және басқа да бірқатар физикалық сипаттамалары эволюция барысында уақыт өткен сайын өзгеріп отыратынын көрсетеді [33]. Осыған байланысты бейстационар аспан денелерінің қозғалысының математикалық модельдерін жасау өзекті мәселелердің бірі болып табылады.

Жұлдыздардың ішкі эволюциясы теориясынан [34] келесідей дамудың әртүрлі кезеңдерінде жұлдыздар айтарлықтай сығылады және созылады. Мысалы, қызыл алып сатысына өту кезінде жұлдыздардың өлшемдері массасына байланысты 10-100 есе өсуі мүмкін [35]. Газдық немесе жұлдыздық бұлттың аясында эволюцияланатын жұлдыздар шоғыры, [36] белгілі, әдетте пульсация күйінде болады.

Жұлдыздардың эволюциясын сипаттау үшін массаның өзгеруіне жұлдыздың (радиусының өзгеруі) реакциясын беретін, сипаттама функциясы енгізіледі. Жұлдыздың массасы өзгерген кездегі, оның өлшемінің өзгеруі зерттеледі. Масса, өлшем және пішіннің өзгеруі физикалық айнымалы жұлдыздар – пульсацияланатын жұлдыздарда айқын көрінеді [37].

Массаның диссипация мен тасымалдану, компоненттің пішіні мен өлшемдерінің өзгеру процестері тығыз қосарланған жүйелерде ерекше қарқынды түрде өтеді [38].

Бейстационар гравитацияланатын денелердің динамикалық әсерінің әртүрлі комбинациялары, мысалы, массаның, пішіннің, өлшемнің айнымалы болуы, гравитацияланатын жүйелердің эволюция жолдарының әр түрлілігін көрсетеді. Аспан механикасының аспектілерінде осы құбылыстарды зерттеу, галактикалық, жұлдызды, планеталық жүйелердің динамикалық эволюциясының табиғатын аша түседі.

В.Г. Фесенков, Г.М. Идлис, Т.Б. Омаров, Ж.Д. Хажидеметриу, Л.Г. Лукьянов, Е.Н. Поляхов, А.А. Беков, А. Депри, Л. Флория және т.б. ғалымдар бейстационар ғарыштық жүйелердің табиғатын зерттеуде бейстационар аспан-механикалық модельдік есептердің ерекше маңыздылығын атап көрсетеді.

Осы саладағы маңызды міндеттердің бірі бейстационар екі дененің массасы айнымалы және инерцияның айнымалы моменттері бар құрылымның есебі болып табылады.

Т.Б. Омаров және А.А. Беков эллипсоидтық координаталарда Гамильтон-Якоби әдісімен айнымалы гравитациялық тұрақты және қарсылықтың қозғаушы күші бар болған жағдайда екі жылжымайтын центр есебінің интеграциялауын жүргізді.

М.Дж. Минглибаев айнымалы өлшемдер мен массаның тұрақты сфероидтық пішінді дененің айналасында нүктелік масса қозғалысын зерттеу үшін жаңа аралық қозғалысты және бейстационар гравитациялық жүйелер үшін канондық ұйытқу теориясын ұсынды. А.А. Беков жұмысында массаның, өлшемдердің және пішінінің айнымалы жағдайы үшін жалпы аралық қозғалысты ұсынды.

Зерттеу жұмысының өзектілігі

Нақты аспан денелері – бейстационар. Денелердің массалары, өлшемдері, пішіні және басқа да бірқатар физикалық сипаттамалары эволюция барысында уақыт өткен сайын өзгеріп отырады. Әсіресе массаның интенсивті диссипация және тасымалдану, компоненттердің пішіні мен өлшемдерінің өзгеру процестері қос жұлдызды жүйелерде ерекше қарқынды түрде өтеді. Сәйкесінше, олардың гравитациялық байланыстары айнымалы болады және Ньютондық өзара потенциалды байланысы тікелей уақыттан тәуелді болады. Осы факторлар олардың динамикалық эволюциясына айтарлықтай әсер етеді. Әр түрлі тәсілдерді пайдаланып өзара гравитацияланушы бейстационар екі аспан денелерінің ілгерлемелі-айналмалы қозғалысын аналитикалық және сандық тәсілмен зерттеу – бүгінгі күндегі теориялық және аспан механикасының өзекті мәселелерінің бірі болып табылады.

Жұмыстың мақсаты – массасы әр түрлі қарқында изотропты түрде өзгеретін өстік симметриялы дененің ғасырлық ұйытқу теңдеулерін зерттеу және массаның айнымалылығының оның динамикалық эволюциясына әсерін анықтау, сондай-ақ эволюциялық теңдеулердің графиктерін алу.

Зерттеу міндеттері

1. Массасы және өлшемі айнымалы өстік симметриялы дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін салыстырмалы координаталар жүйесінде қорытып шығару.

2. Оскуляциялаушы Делоне-Андуайе элементтерінің аналогтарында бейстационар өстік симметриялы дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының ғасырлық ұйытқу теңдеулерін алу.

3. Ғасырлық ұйытқудың толық теңдеулер жүйесін талдау

4. Ғасырлық ұйытқу теңдеулерін аналитикалық талдау және қорытындылау

5. Ғасырлық ұйытқу теңдеулерін сандық тәсілмен шешу және графиктерін алу, массалары тұрақты және айнымалы жағдайларды салыстыру.

6. Бірінші интегралдың үш өлшемді графиктерін тұрғызу.

Зерттеу нысаны

Бейстационар өстік симметриялы дененің бейстационар шардың гравитациялық өрісіндегі ілгерілемелі-айналмалы қозғалысы.

Зерттеу әдістері

Жұмыста бейстационар гравитациялық жүйелер үшін канондық ұйытқу теориясының әдістері, Mathematica компьютерлік алгебрасының заманауи әдістері және сандық әдістер кеңінен қолданылады.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы

Диссертацияда бейстационар өстік симметриялы дененің ілгерлемелі-айналмалы қозғалысын зерттеуде ұйытқыған қозғалыс теңдеулері және ұйытқу теориясының белгілі тәсілдері пайдаланылды.

Бейстационар өстік симметриялы дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысы Делоне-Андуайе элементтер аналогында қарастырылды және ғасырлық ұйытқу теңдеулері алынды.

Ғасырлық ұйытқу теңдеулеріне аналитикалық талдау жасалынды. Сандық тәсілмен ұйытқыған қозғалыстың дифференциалдық теңдеулерінің шешімдері алынды. Диссертацияда алынған шешімдерді аспан механикасында кездесетін күрделі мәселелерді зерттеуде алғашқы жуық қозғалыс ретінде қабылдауға болады.

Қорғауға шығарылатын ғылыми тұжырымдамалар

1. Бір алғашқы интегралы бар төрт теңдеуден тұратын ішкі жүйелерге бөлінетін және қалған теңдеулер жүйесінен тұратын он екі ғасырлық ұйытқу теңдеулер жүйесі алынды. Төрт теңдеулер жүйесі сапалы түрде зерттеліп, тиісті қорытындылар жасалды.

2. Біздің қарастырған мәселенің физикалық қойылымы бойынша жоғарыда көрсетілген геометриялық және механикалық интерпретациялар қарастырылған мәселе үшін кез-келген бастапқы мәндері және массасы мен өлшемдерді сипаттайтын кез-келген функциялар үшін жалпы қасиеттер болып табылады.

3. Алынған ғасырлық ұйытқу теңдеулері сандық тәсілмен шешіліп, Wolfram Marthematica пакетінің көмегімен графиктері алынды.

Нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі

Диссертациялық жұмыстың нәтижелері денелердің массалары мен өлшемдері тұрақты болған жағдайдағы басқа авторлар алған абсолютты қатты денелердің ілгерілемелі-айналмалы қозғалыстары теориясының деректерімен сәйкес келеді. Және импакт факторы жоғары шет ел журналында жарияланымның бар болуымен расталады.

Жұмыс нәтижелерінің теориялық және іс жүзіндегі маңыздылығы Диссертацияда алынған нәтижелер ғарыштанудағы бейстационар жүйелерді зерттеудің кезектегі сатысы болып, әрі қарай ғаламдағы күрделі бейстационар құбылыстарды зерттеуге жаңа мәселелердің қойылымын нақтылайды. Ал, ғылыми іс жүзіндегі маңызы – табылған жаңа шешімдерді аспан денелерінің жасанды және табиғи серігінің динамикалық эволюциясының моделін құрып есептеуде пайдалануға болады.

Жұмыстың аппробациясы

1. М.Дж. Минглибаев, С.Б. Бижанова. Өстік симметриялы бейстационар екі дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын зерттеу // «Фараби әлемі» атты студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясы. – 2019.

2. М.Дж. Минглибаев, С.Б. Бижанова. Поступательно-вращательное движение осесимметричного спутника с переменным коэффициентом сжатия // XLIV Академические чтения по космонавтике. – Москва, 2020. – Т. 1. – С. 310-312.

3. М.Дж. Минглибаев, С.Б. Бижанова. Поступательно-вращательное движение осесимметричного спутника переменной массы и размера в нестационарном центральном гравитационном поле // IX Поляховские чтения, Материалы международной научной конференции по механике. – Санкт-Петербург, 2021. – С. 152-154.

4. M. Minglibayev, A. Prokopenya, S. Bizhanova. Analysis of evolution of a nonstationary axisymmetric body in a nonstationary central gravitational field // 8th International Congress of Serbian Society of Mechanics. Kragujevac, Serbia, 2021.

5. S. Bizhanova. Evolution Equations of Translational-Rotational Motion of an Axisymmetric Satellite with Variable Oblate // International Conference of Application of Computer Algebra (ACA-2021). – 2021. – P. 108.

6. A. Prokopenya, M. Minglibayev, S. Bizhanova. Secular perturbations of translational-rotational motion of a non-stationary axisymmetric body in the central gravitational field // Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2021).

Жарияланымдар

Scopus және Web of Science (Clarivate Analytics) дерекқорымен индекстелетін халықаралық ғылыми журналдарында:

1a. S.B. Bizhanova, M.Zh. Minglibayev, A.A. Prokopenya. A Study of Secular Perturbations of Translational-Rotational Motion in a Nonstationary Two-Body Problem Using Computer Algebra // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2020. – Vol. 60, №. 1. – P. 26-35. https://doi.org/10.1134/S0965542520010054

1б. С.Б. Бижанова, М.Дж. Минглибаев, А.Н. Прокопеня. Исследование вековых возмущений поступательно-вращательного движения в нестационарной задаче двух тел с применением компьютерной алгебры // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Том 60, № 1. – С. 27–36.

ҚР Ғылым және жоғарғы білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті (ҒЖБМ ҒЖБССҚК) ұсынған ғылыми басылымдарында:

1. М.Дж. Минглибаев, С.Б. Бижанова. Өстік симметриялы бейстационар екі дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері // Вестник КБТУ. Серия «Физико-математические и технические науки». – Алматы, 2019. – Т. 16, № 2. – С. 143-149.

2. М.Дж. Минглибаев, С.Б. Бижанова. Массасы мен өлшемі айнымалы өстік симметриялы дененің эволюциялық теңдеулерін зерттеу // Вестник КазНПУ им Абая. Серия «Физико-математические науки». – Алматы, 2020. – Т. 69, №1. – С. 251-257.

3. M.Zh. Minglibayev, S.B. Bizhanova. Translational-rotational motion of a nonstationary axisymmetric body // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series «Physico-Mathematical». – 2021. – Vol. 2, № 336. – P. 131-137.

Шет елдердегі халықаралық ғылыми конференциялардың материалдарында:

1. A.A. Prokopenya, M.Zh. Minglibayev, S.B. Bizhanova. Investigation of the Evolution Equations of the Two-Body Problem with Variable Masses // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. – 2020. – Vol. IX. – P. 204-219.

2. M. Minglibayev, A. Prokopenya, S. Bizhanova. Analysis of Evolution Equations of a Nonstationary Axisymmetric Body in a Nonstationary Central Gravitational Field // 8th International Congress of Serbian Society of Mechanics Kragujevac, Serbia, June 28-30, 2021. – P. 638-647.

Автордың қосқан үлесі

Диссертациялық жұмыста жасалған зерттеулердің негізгі нәтижелерін автор өзі алды. Диссертацияның авторымен орташалау және ғасырлық ұйытқудың дифференциялдық теңдеулерін алу және әдебиеттерге шолу жұмыстары, ғасырлық ұйытқу теңдеулерін аналитикалық талдау және қорытындылау жұмыстары, ғасырлық ұйытқу теңдеулері сандық тәсілмен шешіліп, графиктері массалары тұрақты және айнымалы жағдайларды салыстыру жұмыстары, бірінші интегралдың үш өлшемді графиктерін алу жұмыстары жасалынды. Ал ғылыми кеңесшілермен есептің қойылымын қою, нәтижелерді талдау жұмыстары жүргізілді.

Диссертацияның көлемі және құрылымы

Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен және қосымшалардан тұрады. Жұмыстың жалпы көлемі 99 беттен, 59 суреттен және пайдаланылған әдебиеттер тізімі 71 атаудан тұрады.

Алғыс

Автор отандық ғылыми кеңесші, ф.-м.ғ.д., профессор М.Дж. Минглибаевқа және шетелдік ғылыми кеңесші, ф.-м.ғ.д., профессор А.Н. Прокопеняға мәселенің қойылымына және диссертациялық жұмыстың барлық кезеңдерінде ғылыми басшылық үшін, баға жетпес көмек пен құнды кеңестер бергені үшін зор алғысын білдіреді.

1 МАССАСЫ, ӨЛШЕМІ ЖӘНЕ ПІШІНІ АЙНЫМАЛЫ ЕКІ ДЕНЕНІҢ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ӨРІСІ

1.1 Мәселенің жалпы физикалық қойылымы. Негізгі жорамалдар

Бақылау астрономиясы нақты аспан денелерінің тек сфералық емес, сонымен қатар абсолютты қатты дене еместігін – олардың бейстационар екендігін көрсетеді [25-32]. Денелердің массалары, өлшемдері, пішіні және басқа да бірқатар физикалық сипаттамалары эволюция барысында уақыт өткен сайын өзгеріп отырады. Әсіресе массаның интенсивті диссипация және тасымалдану, компоненттердің пішіні мен өлшемдерінің өзгеру процестері тығыз қосарланған жүйелерде ерекше қарқынды түрде өтеді. Сәйкесінше, олардың гравитациялық байланыстары айнымалы болады және Ньютондық өзара потенциалды байланысы тікелей уақыттан тәуелді болады. Осы факторлар олардың динамикалық эволюциясына айтарлықтай әсер етеді. Гравитациялық жүйелер эволюциясының кейбір кезеңдерінде жүйеге кіретін бейстационар денелердің әсерлері жетекші факторларға айналады, одан әрі қарай осы кезеңнің соңындағы жүйенің күйімен анықталады.

Массалары, өлшемдері мен пішіндері айнымалы табиғи аспан денелерінің гравитациялық өрісінің ерекшелігі аспан денелері массаларын, өлшемдерін және пішіндерін өзгерте отырып айнымалы геометриялық және динамикалық сипаттамаларға ие болуында. Мұндай бейстационар аспан денелерінің гравитациялық күштерін аналитикалық сипаттау үшін мұндай өрістердің негізгі сипаттамалық белгілерін ескере алатын дұрыс бастапқы болжамдар жасау маңызды, сонымен қатар жеткілікті қарапайым аналитикалық нысанның болуы.

Бейстационар «центрлік» аспан денелерінің өзіндік координаталар жүйесі әрқашан бас инерция өстерімен сәйкес келетіндей эволюцияланcын. Бұл жағдайда екінші ретті бас инерция моменттері, денелердің массалары және сызықтық өлшемдері уақыттың үздіксіз функциялары болып табылады. Бейстационар денелердің күштік функциясын жіктеуде екінші гармоникамен шектелеміз. Бейстационар «серіктің» айналмалы қозғалысын зерттеу үшін дененің массалар центрі және бас инерция өстері эволюция барысында өзгеріссіз қалады және Кенигтің меншікті координаталар жүйесі бас инерция өстерімен сәйкес келеді деп болжанады.

Табиғатта аспан денелерінің көпшілігі осындай математикалық модель арқылы жуықтап алынған. Мысалы, кез-келген дене массалары, өлшемдері мен пішіндері эволюция барысында өзіндік координаталар жүйесінде өзара перпендикуляр үш координаталық жазықтыққа қатысты симметрия бұзылмайтындай өзгереді. Механикалық мағынада мұндай денелердің таңдалған координаталық жүйелерге сәйкес диагональды пішінге ие инерция тензоры біз үшін маңызды. Негізінде мұндай денелердің динамикасын басқа координаталар жүйесінде зерттеуге болады, бірақ бұл жағдайда инерция тензоры диагональ болмайды және қозғалыс теңдеулері күрделі болады.

Массалары, өлшемдері және пішіндері айнымалы аспан денелерінің күштік функцияларына арналған аналитикалық өрнектер қарастырылады, олар жеткілікті қарапайым аналитикалық құрылымы бар, абсолютты қатты денелер үшін сәйкес өрнектермен формальды түрде сәйкес келеді, бірақ мүлдем басқа физикалық мәселелерге сәйкес келеді.

Мұндай күштік функцияның екі түрі бар:

1. Айналу эллипсоидымен сипатталатын инерция тензоры бар денелер – яғни екі бас инерция моменті бір-біріне тең, ал үшіншісі олардан өзгеше

$$A(t)=B(t)\neq C(t), \qquad k_c=\frac{C(t)-A(t)}{C(t)}\neq const, \tag{1.1.1}$$

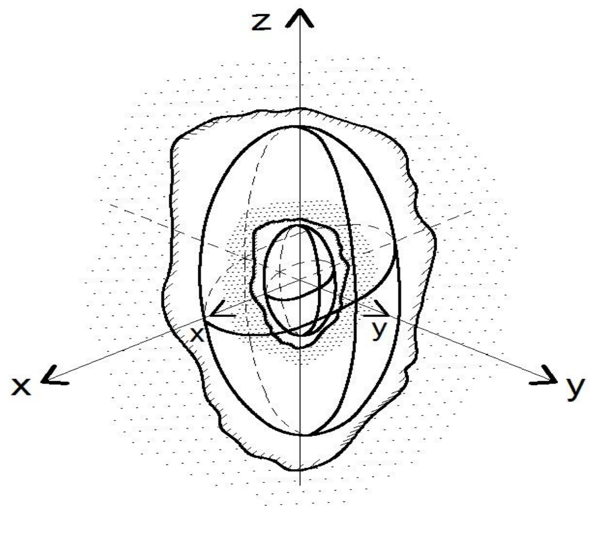
уақытқа байланысты өзгеру заңдылығы кез-келген болып табылады. Мұндай денелер барлық уақытта эволюцияланып отырады, өстік симметриялы болып қалады, сонымен бірге симметрия өсі бойымен сығылатын (созылатын) айнымалы болады.

2. Үш өсті эллипсоидпен сипатталған инерция тензоры бар денелер

$$\frac{A_i(t)}{A_i(t_0)}=\nu_i(t)\chi_i^2(t), \qquad \frac{B_i(t)}{B_i(t_0)}=\nu_i(t)\chi_i^2(t), \qquad \frac{C_i(t)}{C_i(t_0)}=\nu_i(t)\chi_i^2(t). \tag{1.1.2}$$

Олар массасы, өлшемі және пішіні ерікті түрде өзгеретінімен сипатталады, бірақ динамикалық пішіні тұрақты болып қалады.

Күштік функцияның бұл екі түрі өте қарапайым, бірақ бейстационар гравитациялық өрістердің негізгі сипаттамалық белгілерін қамтиды. Осындай күштік функцияның негізінде күрделі гравитациялық өрістердегі денелердің динамикасын ұйытқу теориясының әдістерімен зерттеуге болады.



1.1-сурет. Бейстационар дене

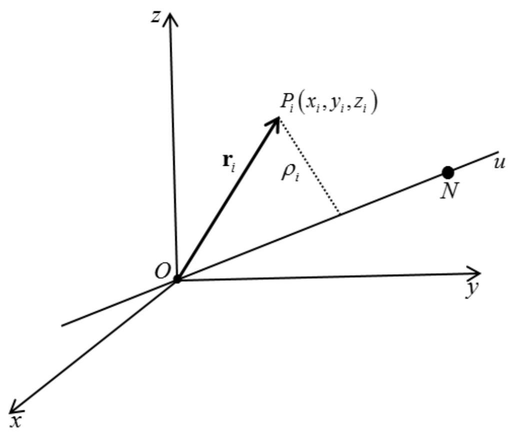
1.2 Бейстационар дененің инерция эллипсоиды

Белгілі бір аспан денесінің тартылыс өрісіндегі өстік симметриялы дененің орбитасын зерттеу кезінде оның пішіні үшін ең ыңғайлы модель екі өсті эллипсоид болып табылатындығы белгілі. Сондықтан да екі өсті эллипсоидтың жалпы сипаттамаларына қысқаша тоқталайық.

u өсіне қатысты N материалдық нүктелерден тұратын механикалық жүйенің инерция моменті жүйе нүктелерінің массаларының және нүктелерден өске дейінгі ρ_i қашықтықтардың квадраттарының көбейтіндісінің қосындысы болып табылады:

$$J_u = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2, \tag{1.2.1}$$

Айналу өстеріне қатысты массаның таралуын инерция моменті сипаттайды. Инерция моменті дененің бұрыштық жылдамдығымен байланысты және оның бұрыштық инерциясын анықтайды. u өсі $Oxyz$ координаталар жүйесінің басынан өтеді делік. Ox, Oy, Oz өстерімен u өсінің құрайтын бұрыштарының косинустарын сәйкесінше α, β, γ деп белгілейміз



1.2-сурет.

$$J_u = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\rho_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\left[\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) - \left(x_i\alpha + y_i\beta + z_i\gamma\right)^2\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\left[\left(1-\alpha^2\right)x_i^2 + \left(1-\beta^2\right)y_i^2 + \left(1-\gamma^2\right)z_i^2 - \right. \tag{1.2.2}$$

$$\left. - 2\alpha\beta x_i y_i - 2\alpha\gamma x_i z_i - 2\beta\gamma y_i z_i\right],$$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ тепе-теңдігіне сүйене отырып, $1-\alpha^2, 1-\beta^2, 1-\gamma^2$ сәйкесінше $\beta^2 + \gamma^2$, $\alpha^2 + \gamma^2$, $\beta^2 + \alpha^2$ ауыстырамыз және тік жақшаның ішіндегі өрнектерді ұқсас шамаларға келтіреміз. Алатынымыз

$$J_u = J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 + J_z\gamma^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{xz}\alpha\gamma, \tag{1.2.3}$$

мұнда келесідей белгілеулер енгізілген:

$$J_x = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\left(y_i^2 + z_i^2\right), \qquad J_y = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\left(z_i^2 + x_i^2\right),$$
$$J_z = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\left(x_i^2 + y_i^2\right), \tag{1.2.4}$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\, x_i y_i, \qquad J_{xz} = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\, x_i z_i, \qquad J_{yz} = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\, y_i z_i, \tag{1.2.5}$$

(1.2.4), (1.2.5)-шамалар таңдап алынған u өсіне тәуелсіз. (1.2.4)-шамалар өстік инерция моменттері деп аталады. J_x – Ox өсіне қатысты, J_y – Oy өсіне қатысты, J_z – Oz өсіне қатысты инерция моменттері. (1.2.5)-шамалар центрден тепкіш инерция моменттері деп аталады. Өстік инерция моменті жүйенің сәйкес өс төңірегінде айналу кезіндегі инерттілігін сипаттайды. Центрден тепкіш инерция моменттерін теңгерілмеген жүйе массаларының өлшемі ретінде қарастыруға болады, олар координаталық жазықтықтарға қатысты массалардың бейсимметриялы таралуын сипаттайды.

Әртүрлі O нүктелері үшін өстік және центрден тепкіш инерция моменттері әртүрлі. Олар сонымен қатар қарастырылып отырған O нүктесінің төңірегіндегі $Oxyz$ координата жүйесінің бұрылуы кезінде де өзгереді. Бұрылу кезінде (1.2.4), (1.2.5)-шамаларының екінші рангтағы симметриялық тензорды анықтайтын формулаларға сәйкес өзгеретінін көрсетуге болады. Матрицаның $\mathbf{J}$ түрі

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{Vmatrix} \tag{1.2.6}$$

O нүктесі үшін жүйенің инерция тензоры деп аталатын екінші рангты тензорды анықтайды.

u өсінің бағыты өзгергенде, яғни α, β, γ бұрыштары өзгергенде пайда болатын J_u инерция моментінің өзгеруін қарастырайық. Бұл өзгерісті көрнекі түрде көрсету үшін O нүктесінен бастап u өсінің бойымен ұзындығы $1/J_u$ болатын ON кесіндісін саламыз (1.2-сурет), ол

$$ON = 1/J_u,$$

және $N(x, y, z)$ нүктесінің геометриялық орнын табамыз. Алатынымыз

$$\alpha = \sqrt{J_u}x, \qquad \beta = \sqrt{J_u}y, \qquad \gamma = \sqrt{J_u}z,$$

α, β және γ мәндерін 1.2.3-теңдікке қойып

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx = 1, \tag{1.2.7}$$

(1.2.7)-нің екінші ретті беті – эллипсоид болып табылады. Шынында да, $J_u \geq \delta > 0$ болғандықтан ON кесіндісі шекті ұзындыққа ие. Барлық P_i нүктелері бір түзу бойында жатқан кездегі шекті жағдай ерекше болып келеді. Сонда инерция моменті $J_u = 0$ болады және инерция эллипсоиды цилиндрге айналады.

(1.2.7)-ші эллипсоид O нүктесі үшін жүйенің инерция эллипсоиды деп аталады. Егер O нүктесі массалар центрімен сәйкес келсе, онда (1.2.7)-ші эллипсоид центрлік инерция эллипсоиды деп аталады. $Oxyz$ координаталар жүйесінің бұрылуы кезінде инерция эллипсоидының теңдеуі өзгереді. Инерция эллипсоидының бас өстері O нүктесі үшін жүйенің бас инерция өсі деп аталады. $Ox_*y_*z_*$ координаталар жүйесінде өстері инерция эллипсоидының бас өстері бойымен бағытталған, (1.2.7)-ші теңдеу келесідей болады

$$Ax_*^2 + By_*^2 + Cz_*^2 = 1. \tag{1.2.8}$$

Бұл координаталар жүйесінде центрден тепкіш инерция моменттері нөлге тең: $J_{x_*y_*} = J_{x_*z_*} = J_{y_*z_*} = 0$. A, B, C шамалары – сәйкесінше Ox_*, Oy_*, Oz_* бас өстерге қатысты инерция моменттері. Оларды O нүктесі үшін жүйенің бас инерция моменттері деп атайды. Егер O нүктесі массалар центрімен сәйкес келсе, онда Ox_*, Oy_*, Oz_* өстері – бас центрлік инерция өсі деп, ал A, B, C шамалары – бас центрлік инерция моменттері деп аталады.

Кез келген эллипсоид үшін бас өстер болатыны аналитикалық геометриядан белгілі. A, B, C мәндері (1.2.8)-ші матрицаның меншікті мәндері болып табылады. Егер олар әртүрлі болса, онда бас өстер бірегей түрде анықталады. Егер O нүктесі үшін инерция эллипсоиды Oz_* өсінің төңірегінде бұрылу эллипсоиды болса, онда оның бас өсі ретінде Oz_* өсін және эллипсоидтың экваторлық жазықтықта жатқан кез-келген екі ортогональды өсін алуға болады. Егер $A = B = C$ болса, онда O нүктесі арқылы өтетін барлық өстер ол үшін бас өстер болып табылады.

Инерция моменті эллипсоидтың ең кіші өсіне қатысты ең үлкен мәнге ие, ал ең кішісі – оның ең үлкен өсіне қатысты.

Бас инерция моменттерінің қасиеттері. Кез келген эллипсоид инерция эллипсоиды бола алмайды. Егер O нүктесі үшін инерцияның бас өстері Ox_*, Oy_*, Oz_* өстері ретінде қабылданса, онда инерция эллипсоидының теңдеуі (1.2.8) түрінде болады, мұндағы

$$A = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\left(y_{*i}^2 + z_{*i}^2\right), \qquad B = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\left(z_{*i}^2 + x_{*i}^2\right),$$
$$C = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\left(x_{*i}^2 + y_{*i}^2\right), \tag{1.2.9}$$

Бас инерция моменттері (сонымен қатар өстік инерция моменттері (1.2.4)) үшбұрыштың теңсіздіктерін қанағаттандырады.

$$A + B \ge C, \qquad A + C \ge B, \qquad B + C \ge A, \tag{1.2.10}$$

Осы теңсіздіктердің біріншісін тексерейік

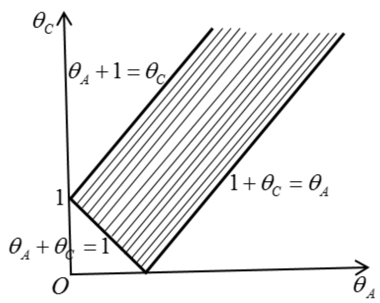
$$\begin{aligned} A + B &= \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\left(x_{*i}^2 + y_{*i}^2 + 2z_{*i}^2\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i(t)\left(x_{*i}^2 + y_{*i}^2\right) + 2\sum_{i=1}^{N} m_i(t) z_{*i}^2 = C + 2\sum_{i=1}^{N} m_i(t) z_{*i}^2 \ge C, \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

теңдік белгісі жүйенің барлық нүктелері Ox_*y_* жазықтығында жатқанда сонымен қатар барлық i үшін $z_{*i} = 0$ болған жағдайда ғана мүмкін болады. (1.2.10)-теңсіздіктердегі екінші және үшінші теңсіздіктер дәл осылай тексеріледі.

Инерция моменттерінің рұқсат етілген мәндерінің диапазонын графиктік түрде көрсету үшін $\theta_A = A/B,\ \theta_C = C/B$ белгілеулерін енгіземіз. (1.2.10)-теңсіздіктерді былай жазуға болады

$$\theta_A + 1 \ge \theta_C, \qquad \theta_A + \theta_C \ge 1, \qquad 1 + \theta_C \ge \theta_A, \tag{1.2.12}$$

Параметрлердің мүмкін болатын мәндерінің аймағы жіңішке сызықтармен 1.3-суретте көрсетілген. Ол өзара параллель $\theta_A + 1 = \theta_C$ мен $1 + \theta_C = \theta_A$ және оң жақ пен түзудің жоғары жағында орналасқан $\theta_A + \theta_C = 1$ сызықтардың арасындағы шексіз сызықтармен сипатталады.



1.3-сурет. Параметрлердің мүмкін болатын мәндерінің аймағы

Шекаралық аймағындағы мүмкін болатын мәндерінің параметрлері $\theta_A+1=\theta_C$, $1+\theta_C=\theta_A$ және $\theta_A+\theta_C=1$ сәйкесінше Ox_*y_*, Ox_*z_* және Oy_*z_* жазықтығында жатқан материялық нүктелердің жүйесін көрсетеді. 1.3-суреттегі (1,0) нүкте, (0,1) нүкте және $\theta_A+1=\theta_C$, $1+\theta_C=\theta_A$ түзуіндегі шексіз алыстаған нүктелер сәйкесінше Ox_*, Oz_* және Oy_* өстерінде жатқан материялық нүктелердің жүйесін сипаттайды.

1.3 Массасы мен өлшемі айнымалы екі өсті эллипсоидтың гравитациялық өрісі

Аспан денелерінің тартылыс өрісіндегі бейстационар өстік симметриялы дененің қозғалысын зерттеудегі ыңғайлы модель екі өсті эллипсоид (біртекті) болып табылады. Өзіне тартатын дене пішіні еркін болсын, ал тығыздығы $\alpha=\alpha(t,x,y,z)$ болсын.

Сонымен қатар денемен байланысқан $Oxyz$ координата жүйесінде қарастырылады, координатаның бас нүктесі $Oxyz$ дененің инерция центрінде орналасқандықтан P нүктеге тартылыс потенциалы U келесі теңдеумен жазылады [1]

$$U = f\iiint\limits_{T(t)} \frac{\alpha d\tau}{\Delta}, \qquad (1.3.1)$$

мұндағы f – гравитациялық тұрақты, $T(t)$ – дене көлемі

$$\Delta=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}, \qquad \cos\gamma=\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'},$$

$d\tau$ элемент көлемінде орналасқан r,x,y,z – радиус-вектор және P нүктесінің координатасы, ал r',x',y',z' – радиус-вектор және P' нүктесінің координатасы, γ – $\vec{r}$ және $\vec{r}'$ векторларының арасындағы бұрыш. Дененің тартылысында P нүктесі жатпайды деп есептеп $\vec{r}'/\vec{r}$ қатынасының дәрежесі бойынша қатарға Δ^{-1} жіктейміз.

Келесі өрнекті жазамыз

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}},$$

бұл өрнек Лежандр полиномының кейбір қасиеттерін қолдануға мүмкіндік береді. Осы теңдеуді пайдаланып $1/\Delta$ үшін келесі жіктеуді жазамыз

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n\left(\cos\gamma\right), \tag{1.3.2}$$

(1.3.1)-ші теңдеудің орнына қойып алатынымыз

$$U = f\iiint\limits_{T(t)} \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n\left(\cos\gamma\right)\alpha d\tau, \tag{1.3.3}$$

Енді полярлық координаталар жүйесіне көшейік

$$\begin{aligned} x &= r\cos\delta\cos\lambda, & x' &= r'\cos\delta'\cos\lambda', \\ y &= r\cos\delta\sin\lambda, & y' &= r'\cos\delta'\sin\lambda', \\ z &= r\sin\delta, & z' &= r'\sin\delta', \end{aligned}$$

онда $\cos\gamma$ үшін табатынымыз

$$\cos\gamma = \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\left(\lambda - \lambda'\right),$$

(1.3.3)-ші өрнектің оң жағын полярлық координатамен өрнектеу үшін Лежандр полиномы үшін қосындылар теоремасын пайдаланып

$$\begin{aligned} P_n\left(\cos\gamma\right) &= P_n\left(\sin\delta\right)P_n\left(\sin\delta'\right) + \\ &+ 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n-k)!}P_n^{(k)}\left(\sin\delta\right)P_n^{(k)}\left(\sin\delta'\right)\cos k\left(\lambda - \lambda'\right), \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

мұндағы

$$\cos k\left(\lambda-\lambda'\right)=\cos k\lambda\cos k\lambda'+\sin k\lambda\sin k\lambda',$$

онда (1.3.4)-ші теңдікті келесі түрде жазуға болады

$$P_n\left(\cos\gamma\right)=P_n\left(\sin\delta\right)P_n\left(\sin\delta'\right)+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(n-k\right)!}{\left(n+k\right)!}P_n^{(k)}\left(\sin\delta\right)\cos k\lambda\cdot$$
$$\cdot\left[P_n^{(k)}\left(\sin\delta'\right)\cos k\lambda'\right]+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(n-k\right)!}{\left(n+k\right)!}P_n^{(k)}\left(\sin\delta\right)\sin k\lambda\left[P_n^{(k)}\left(\sin\delta'\right)\sin k\lambda'\right],$$

Егер бұл теңдікті (1.3.4)-ші теңдеуге қойсақ

$$\begin{gathered}U=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}P_n(\sin\delta)\iiint\limits_{T(t)}r'^nP_n(\sin\delta')\alpha d\tau+f\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r^{n+1}}P_n^k(\sin\delta)\cos k\lambda\cdot\\ \cdot\iiint\limits_{T(t)}\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}r'^nP_n^{(k)}(\sin\delta')\cos k\lambda'\alpha d\tau+f\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r^{n+1}}P_n^k(\sin\delta)\sin k\lambda\cdot\\ \cdot\iiint\limits_{T(t)}\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}r'^nP_n^{(k)}(\sin\delta')\sin k\lambda'\alpha d\tau.\end{gathered}\tag{1.3.5}$$

Келесі белгілеулерді енгізейік

$$\begin{gathered}J_n\left(t\right)=-\frac{\iiint\limits_{T}r'^nP_n\left(\sin\delta'\right)\alpha d\tau}{m\left(t\right)r_0^n\left(t\right)},\\ C_{nk}\left(t\right)=\frac{\iiint\limits_{T}\frac{2\left(n-k\right)!}{\left(n+k\right)!}r'^nP_n^{(k)}\left(\sin\delta'\right)\cos k\lambda'\alpha d\tau}{m\left(t\right)r_0^n\left(t\right)},\\ S_{nk}\left(t\right)=\frac{\iiint\limits_{T}\frac{2\left(n-k\right)!}{\left(n+k\right)!}r'^nP_n^{(k)}\left(\sin\delta'\right)\sin k\lambda'\alpha d\tau}{m\left(t\right)r_0^n\left(t\right)},\end{gathered}\tag{1.3.6}$$

мұндағы $m\left(t\right)$ – дене массасы, $r_0\left(t\right)$ – сызықтық шама. Жер үшін r_0 орнына орташа экваторлық радиусты алған ыңғайлы. $J_n\left(t\right)$, $C_{nk}\left(t\right)$ және $S_{nk}\left(t\right)$ шамалары өлшемсіз екендігі белгілі. Осы белгілеулерді ескере (1.3.5)-ші өрнекті келесі түрде жазамыз

$$U=-\frac{fm(t)}{r}\sum_{n=0}^{\infty}J_n(t)\left(\frac{r_0(t)}{r}\right)^n P_n\left(\sin\delta\right)+$$
$$+\frac{fm(t)}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0(t)}{r}\right)^n P_n^{(k)}\left(\sin\delta\right)\left[C_{nk}(t)\cos k\lambda+S_{nk}(t)\sin k\lambda\right], \tag{1.3.7}$$

$J_n\left(t\right), C_{nk}\left(t\right)$ және $S_{nk}\left(t\right)$ коэфиценттері дене пішіні мен оның ішіндегі масса үлесіне байланысты. Олардың біріншісін қарастырайық. (1.3.6)-да $n=0$ болсын

$$P_0\left(\sin\delta'\right)=1 \text{ және } \iiint\limits_{T(t)}\alpha d\tau=m\left(t\right),$$

онда

$$J_0=-1 \tag{1.3.8}$$

(1.3.6)-шы теңдеуден $n=1$ және $k=1$ және келесіні ескере

$$P_1\left(\sin\delta'\right)=\sin\delta', \qquad P_1^{(1)}\left(\sin\delta'\right)=\cos\delta',$$

табатынымыз

$$J_1\left(t\right)=-\frac{\iiint\limits_T r'\alpha\sin\delta' d\tau}{m\left(t\right)r_0\left(t\right)}=\frac{-\iiint\limits_T z' dm}{m\left(t\right)r_0\left(t\right)}=-\frac{z_0}{r_0\left(t\right)}$$
$$C_{11}\left(t\right)=\frac{\iiint\limits_T r'\alpha\cos\delta'\cos\lambda' d\tau}{m\left(t\right)r_0\left(t\right)}=\frac{\iiint\limits_T x' d\tau}{m\left(t\right)r_0\left(t\right)}=\frac{x_0}{r_0\left(t\right)}$$
$$S_{11}=\iiint\limits_T\frac{r'\alpha\cos\delta'\sin\lambda' d\tau}{m\left(t\right)r_0\left(t\right)}=\frac{\iiint\limits_T y' d\tau}{m\left(t\right)r_0\left(t\right)}=\frac{y_0}{r_0\left(t\right)}$$

мұндағы x_0, y_0, z_0 – дене масса центірінің координатасы. Координатаның бас нүктесі Oxy дененің инерция центрінде орналасқандықтан келесі қорытындыны жазамыз

$$J_1=0, \qquad C_{11}=0, \qquad S_{11}=0, \tag{1.3.9}$$

егер (1.3.6)-шы теңдеудің орнына $n=2$ және $k=1,\ k=2$ орнына қойсақ, онда келесідей қарапайым теңдікті алуға болады

$$J_2(t)=\frac{2C(t)-\left(A(t)+B(t)\right)}{2m\left(t\right)r_0^2(t)},\qquad C_{22}=\frac{B(t)-A(t)}{4m\left(t\right)r_0^2(t)},$$
$$C_{21}(t)=\frac{E(t)}{m\left(t\right)r_0^2(t)},\qquad S_{21}(t)=\frac{D(t)}{m\left(t\right)r_0^2(t)},\qquad S_{22}(t)=\frac{F(t)}{2m\left(t\right)r_0^2(t)},\tag{1.3.10}$$

мұндағы $A(t),B(t),C(t)$ – центрлік бас инерция моменттері, $D(t),E(t),F(t)$ – инерция туындысы, сонымен қатар

$$A(t)=\iiint_T\left(y'^2+z'^2\right)\alpha d\tau,\qquad D(t)=\iiint_T y'z'\alpha d\tau,$$
$$B(t)=\iiint_T\left(x'^2+z'^2\right)\alpha d\tau,\qquad E(t)=\iiint_T x'z'\alpha d\tau,$$
$$C(t)=\iiint_T\left(x'^2+y'^2\right)\alpha d\tau,\qquad F(t)=\iiint_T x'y'\alpha d\tau,$$

Келесі (1.3.8) және (1.3.9) негізінде (1.3.7)-ші теңдеуі соңғы түрге келеді

$$U=\frac{fm(t)}{r}\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}J_n(t)\left(\frac{r_0(t)}{r}\right)^n P_n\left(\sin\delta\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0(t)}{r}\right)^n P_n^{(k)}\left(\sin\delta\right)\left[C_{nk}(t)\cos k\lambda+S_{nk}(t)\sin k\lambda\right].\right.\tag{1.3.11}$$

Енді бірнеше ескертулер жасайық

1. Координатаның бір өсі айталық Oz өсі бас инерция өсімен сәйкес келсін делік. Онда D және E инерция туындысы нөлге тең болады, сондықтан

$$C_{21}=0\qquad\text{және}\qquad S_{21}=0.$$

Егер барлық үш координата өстері бас центрлік инерция өстерімен сәйкес келсе S_{22} коэфиценті де нөлге тең болады.

2. Егер тығыздық және дене пішіні тұрақты болса, онда J_n, C_{nk} және S_{nk} шамалары да тұрақты болады, ал егер тығыздық және дене пішіні уақытқа тәуелді болса, онда $J_n(t), C_{nk}(t)$ және $S_{nk}(t)$ шамалары уақыт функциясы болады.

Қарастырылып отырған мәселенің шарты:

1) Екінші дене өстік симметриялы

$$A_2(t) = B_2(t) \neq C_2(t),$$

2) Дененің сәйкес келетін өзіндік координаталар жүйесінің өстері бас инерция өстерімен сәйкес келеді және бұл жағдай эволюция барысында сақталады, сондықтан U потенциялын жіктеу кезінде S_{22}, C_{21}, S_{21} коэффициенттері нөлге тең болады.

Жоғарыда алынған түрлендірулер жалпы жағдай үшін, яғни кез-келген өзара тартылатын денелердің күштік функциясының жалпы өрнегін береді.

Дегенмен, практикалық қолданбаларда әдетте мұндай қатарлардың алғашқы бірнеше мүшелері ғана пайдаланылады, сондықтан осы алғашқы мүшелер үшін толық өрнектерді беретін формулаларды алу тиімдірек. Екінші гармоникаға дейінгі күштік функцияның жуық өрнегімен шектелеміз.

Ең алдымен, бізде

$$P_0(P,M) = P_0(\cos\gamma) = 1 \tag{1.3.12}$$

Ары қарай, оңай аламыз

$$P_1(P,M) = rr'P_1(\cos\gamma) = rr'\cos\gamma = xx' + yy' + zz', \tag{1.3.13}$$

Енді $n = 2$ деп есептеп табатынымыз

$$P_2(P,M) = r^2 r'^2 P_2(\cos\gamma) = r^2 r'^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2\gamma - \frac{1}{2}\right), \tag{1.3.14}$$

осыдан

$$P_2(P,M) = \frac{3}{2}(xx' + yy' + zz') - \frac{1}{2}r'^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \tag{1.3.15}$$

немесе толық түрде

$$\begin{aligned} P_2(P,M) = {} & \frac{x^2}{2}\left(3x'^2 - r'^2\right) + \frac{y^2}{2}\left(3y'^2 - r'^2\right) + \\ & + \frac{z^2}{2}\left(3z'^2 - r'^2\right) + 3xy \cdot x'y' + 3xz \cdot x'z' + 3yz \cdot y'z', \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

$$U_n(x,y,z)=\int\limits_{(T)} P_n(P,M)\,dm, \tag{1.3.17}$$

Онда $n=0,1,2$ деп есептеп және (1.3.12)-(1.3.14) формулаларды ескере отырып, біздің табатынымыз

$$U_0(x,y,z)=\int\limits_{(T)} dm=m, \tag{1.3.18}$$

Мұндағы m – тартылатын дененің жалпы массасы.

Ары қарай

$$U_1(x,y,z)=x\int\limits_{(T)} x'dm+y\int\limits_{(T)} y'dm+z\int\limits_{(T)} z'dm=m(xx'+yy'+zz'), \tag{1.3.19}$$

$n=2$ үшін табатынымыз

$$\begin{aligned}U_2(x,y,z)=\frac{x^2}{2}\int\limits_{(T)}\left(3x'^2-r'^2\right)dm+\frac{y^2}{2}\int\limits_{(T)}\left(3y'^2-r'^2\right)dm+\\+\frac{z^2}{2}\int\limits_{(T)}\left(3z'^2-r'^2\right)dm+3xy\int\limits_{(T)}x'y'dm+\\+3xz\int\limits_{(T)}x'z'dm+3yz\int\limits_{(T)}y'z'dm,\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

Мұнда жоғарыда берілген екінші ретті инерция моменттерінің өрнектерін қолданып, U_2 өрнегін келесідей жазамыз

$$\begin{aligned}U_2(x,y,z)=\frac{1}{2}(B+C-2A)x^2+\frac{1}{2}(B+C-2A)y^2+\\+\frac{1}{2}(B+C-2A)z^2+3Dxy+Exz+3Fyz,\end{aligned} \tag{1.3.21}$$

U_2 көпмүшесін ыңғайлырақ келесідей түрде де жазуға болады

$$U_2(x,y,z)=\frac{1}{2}r^2(A+B+C-3J), \tag{1.3.22}$$

мұндағы

$$J = A\left(\frac{x}{r}\right)^2 + B\left(\frac{y}{r}\right)^2 + C\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 2D\frac{xy}{r} - 2E\frac{xz}{r} - 2F\frac{yz}{r}, \qquad (1.3.23)$$

екі дененің массалар центрін қосатын түзуге қатысты өстік симметриялы дененің инерция моменті.

Егер координата өстері дененің бас инерция өстерімен сәйкес келсе, $D = E = F = 0$ және (1.3.21)-(1.3.22) формулалары қарапайым түрге келеді

$$\begin{aligned} U_2(x,y,z) &= \frac{1}{2}(B + C - 2A)x^2 + \frac{1}{2}(A + C - 2B)y^2 + \frac{1}{2}(A + B - 2C)z^2 = \\ &= \frac{1}{2}(B + C - 2A)(x^2 - z^2) + \frac{1}{2}(A + C - 2B)(y^2 - z^2), \end{aligned} \qquad (1.3.24)$$

$$J = A\left(\frac{x}{r}\right)^2 + B\left(\frac{y}{r}\right)^2 + C\left(\frac{z}{r}\right)^2, \qquad (1.3.25)$$

Егер P_1 – шар, бас инерция моменттері бір-біріне тең

$$A_1(t) = B_1(t) = C_1(t)$$

яғни

$$U_1 \approx \frac{fm_1(t)m_2(t)}{R}, \qquad R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad (1.3.26)$$

Егер P_2 – бейстационар өстік симметриялы дене, бас инерция моменттері өзара тең емес

$$A_2(t) = B_2(t) \neq C_2(t),$$

яғни

$$U_2 = fm_1(t)\frac{2A_2(t) + C_2(t) - 3J_2}{2R^3}, \qquad (1.3.27)$$

Сонымен, өзара гравитацияланушы центрлік дене шар мен өстік симметриялы дененің күштік функцияның өрнегі келесідей болады

$$U \approx \frac{fm_1(t)m_2(t)}{R} + fm_1(t)\frac{2A_2(t) + C_2(t) - 3J_2}{2R^3}. \qquad (1.3.28)$$

2 БЕЙСТАЦИОНАР ЕКІ ӨСТІ ДЕНЕНІҢ ІЛГЕРІЛЕМЕЛІ-АЙНАЛМАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСЫН ДЕЛОНЕ-АНДУАЙЕ ЭЛЕМЕНТТЕР АНАЛОГЫНДА ЗЕРТТЕУ

2.1 Мәселенің физикалық қойылымы

Өзара Ньютон күшімен әсерлесетін массасы, өлшемі және сығылуы айнымалы бейстационар P_1, P_2 аспан денелерінің қозғалысын қарастырайық.

Келесі шарттар орындалсын делік:

1. Бірінші дене – «центрлік», айнымалы массасы $m_1 = m_1(t)$, айнымалы радиусы $l_1 = l_1(t)$, тығыздығы айнымалы сфералық симметриялы дене – шар

$$A_1(t) = B_1(t) = C_1(t); \tag{2.1.1}$$

2. Екінші дене – «серік», айнымалы массасы $m_2 = m_2(t)$, пішіндері айнымалы, динамикалық құрылымы өстік симметриялы және $l_A = l_A(t),\ l_C = l_C(t)$ сызықты өлшеммен сипатталсын, оның екінші ретті инерция моменттері айнымалы және белгілі уақыт функциялары. Мұндай «серік» айнымалы сығылуға ие және оның A, B, C бас центрлік инерция моменттері келесідей қатынастарды қанағаттандырады

$$A_2(t) = B_2(t) \neq C_2(t), \qquad k_c = \frac{C_2(t) - A_2(t)}{C_2(t)} \neq const; \tag{2.1.2}$$

3. Центрлік дененің және серіктің массалары және сызықты өлшемдері әртүрлі қарқында изотропты, радиалды түрде өзгереді, сондықтанда қосымша реактивті күш және айналдырушы момент туындамайды

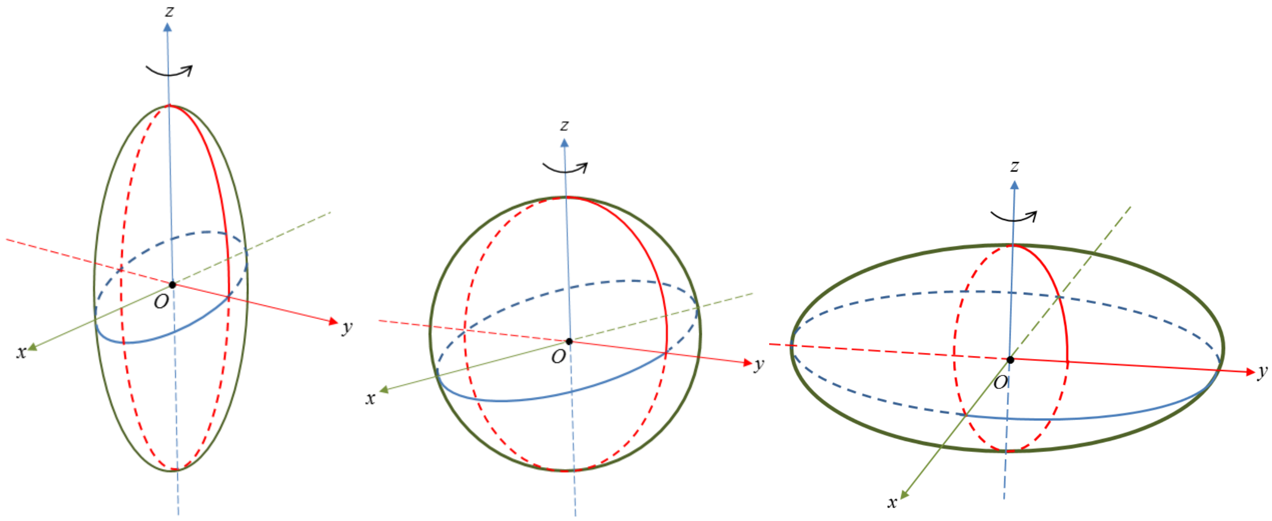
$$\frac{\dot{m}_1(t)}{m_1(t)} \neq \frac{\dot{m}_2(t)}{m_2(t)}, \qquad \frac{\dot{l}_1(t)}{l_1(t)} \neq \frac{\dot{l}_A(t)}{l_A(t)} \neq \frac{\dot{l}_C(t)}{l_C(t)}; \tag{2.1.3}$$

4. Бейстационар денелердің Ньютондық өзара әрекеттесуінің күштік функциясының өрнегінде екінші ретті гармониканы қоса алғанда күштік функцияның жуық өрнегімен шектелеміз

$$U \approx U_1 + U_2; \tag{2.1.4}$$

5. Бейстационар өстік симметриялы дене экваторлық симметрия жазықтығына ие. Сондықтан, оның үш өзара перпендикуляр симметрия жазықтығы бар;

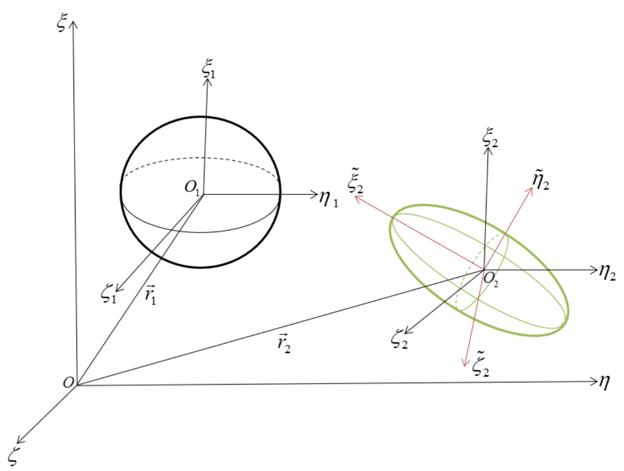
6. Дененің бас инерция өстерімен сәйкес келетін өзіндік координаталар жүйесінің өстерін осы үш өзара перпендикуляр жазықтықтардың қиылысу сызығы бойымен бағыттаймыз. Денеге қатысты осы өстердің бағыты эволюция барысында өзгеріссіз қалады.



2.1-сурет. Созылған сфероид, шар, сығылған сфероид.

2.1.1 Абсолютты координаталар жүйесіндегі қозғалыс теңдеулері

Қос жұлдызды жүйелердегі орбита элементтерінің эволюциясын зерттеу барысында дененің ілгерілемелі қозғалысына оның айналмалы қозғалысы және динамикалық құрылымының әсерін зерттеу қажет болады. Осыған байланысты массалары мен пішіндері айнымалы гравитацияланушы екі дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысы есебінің математикалық қойылымы қойылып, абсолютты және салыстырмалы координаталар жүйесінде дифференциалдық теңдеулері алынған. Денелердің массалары уақыт бойынша әртүрлі қарқында изотропты түрде өзгереді.



2.2-сурет. Абсолютты координаталар жүйесі

Егер $O\xi\eta\zeta$ абсолютты координаталар жүйесіндегі шар және өстік симметриялы денелердің меншікті өстерінің бағыттары сәйкесінше осы денелердің бас инерция өстерімен сәйкес келсе, онда денелердің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулерінің толық жүйесі келесі түрде жазылады [32,39]

$$m_1(t)\ddot{\xi}_1 = \frac{\partial U}{\partial \xi_1}, \qquad m_1(t)\ddot{\eta}_1 = \frac{\partial U}{\partial \eta_1}, \qquad m_1(t)\ddot{\zeta}_1 = \frac{\partial U}{\partial \zeta_1}, \tag{2.1.5}$$

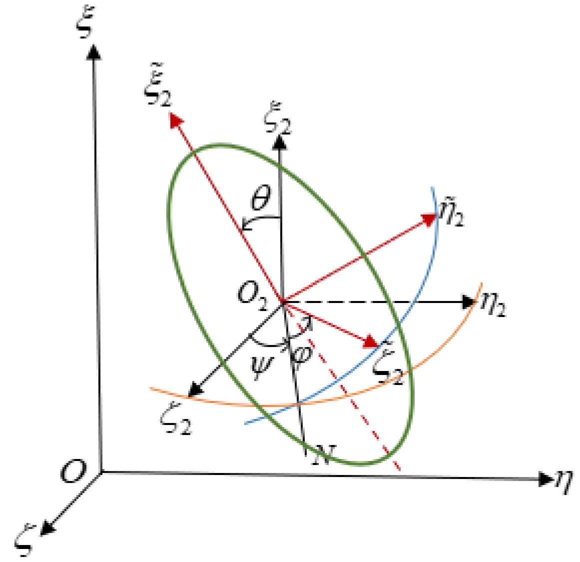
$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(A_1(t)\,p_1\right) = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(A_1(t)\,q_1\right) = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(C_1(t)\,r_1\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

$$m_2(t)\ddot{\xi}_2 = \frac{\partial U}{\partial \xi_2}, \qquad m_2(t)\ddot{\eta}_2 = \frac{\partial U}{\partial \eta_2}, \qquad m_2(t)\ddot{\zeta}_2 = \frac{\partial U}{\partial \zeta_2}, \tag{2.1.7}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(A_2(t)\,p_2\right) - \left(A_2(t) - C_2(t)\right)q_2 r_2 = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\theta_2}\left[\frac{\partial U}{\partial \psi_2} - \cos\theta_2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_2}\right] + \cos\varphi_2 \frac{\partial U}{\partial \theta_2}, \\ &\frac{d}{dt}\left(A_2(t)\,q_2\right) - \left(C_2(t) - A_2(t)\right)r_2 p_2 = \frac{\cos\varphi_2}{\sin\theta_2}\left[\frac{\partial U}{\partial \psi_2} - \cos\theta_2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_2}\right] - \sin\varphi_2 \frac{\partial U}{\partial \theta_2}, \\ &\frac{d}{dt}\left(C_2(t)\,r_2\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

мұндағы $m_i(t),\ A_i(t),\ \left(A_i(t) = B_i(t)\right),\ C_i(t)$ – денелердің массалары және бас инерция моменттері; ξ_i, η_i, ζ_i – $O\xi\eta\zeta$ қозғалмайтын өстердегі O_i массалар центрінің декарттық координаталары; p_i, q_i, r_i – Эйлердің кинематикалық теңдеуін сипаттайтын, денелердің айналмалы қозғалысының бұрыштық жылдамдығының меншікті координата жүйесінің өстеріне проекциялары.

$$\begin{aligned} p_i &= \dot{\psi}_i \sin\theta_i \sin\varphi_i + \dot{\theta}_i \cos\varphi_i, \\ q_i &= \dot{\psi}_i \sin\theta_i \cos\varphi_i - \dot{\theta}_i \sin\varphi_i, \\ r_i &= \dot{\psi}_i \cos\theta_i + \varphi_i, \qquad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{2.1.9}$$



2.3-сурет. Эйлер бұрыштары

мұндағы $\psi_i, \varphi_i, \theta_i$ – Эйлер бұрыштары. $O\xi\eta\zeta$ – абсолютты координаталар жүйесі, бекітілген. $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ – денемен қатаң байланысқан салыстырмалы координаталар жүйесі, қозғалмалы. $O_2\tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_2\tilde{\zeta}_2$ – өзіндік координаталар жүйесі. $O_2\zeta_2\eta_2$ жазықтығы $O_2\tilde{\zeta}_2\tilde{\eta}_2$ жазықтығымен O_2N түйіндер сызығында қиылысады. $O_2\zeta_2$ өсімен түйіндер сызығының арасындағы бұрыш, яғни қатты дененің қозғалмайтын өсін айнала қозғалатын бұрыш ψ әрпімен белгіленеді және прецессия бұрышы деп аталады. $O_2\xi_2$ және $O_2\tilde{\xi}_2$ өстерінің арасындағы бұрыш θ әрпімен белгіленіп, нутация бұрышы деп аталады және тек бір ғана бұрыштың өзгеруінен болатын дене қозғалысын айтамыз. $O_2\tilde{\zeta}_2$ өсімен түйіндер сызығының арасындағы бұрыш, яғни дененің меншікті өс төңірегіндегі айналысын анықтайтын бұрыш φ әрпімен белгіленеді және сәйкесінше меншікті айналу бұрышы деп аталады.

Алынған (2.1.5)-(2.1.9) теңдеулері қарастырылып отырған мәселедегі бейстационар өстік симметриялы дененің бейстационар центрлік өрістегі ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын абсолютты координаталар жүйесінде толық сипаттайды.

Абсолютты координаталар жүйесінде екі дененің ілгерілемелі қозғалысының интегралын алуға болады, бірақ айналмалы қозғалыста бізде күрделі болады, сондықтан біз салыстырмалы координаталар жүйесінде қозғалыс теңдеуін алуға көшеміз, өйткені салыстырмалы координаталар жүйесінде қозғалыс теңдеуін алу ыңғайлы.

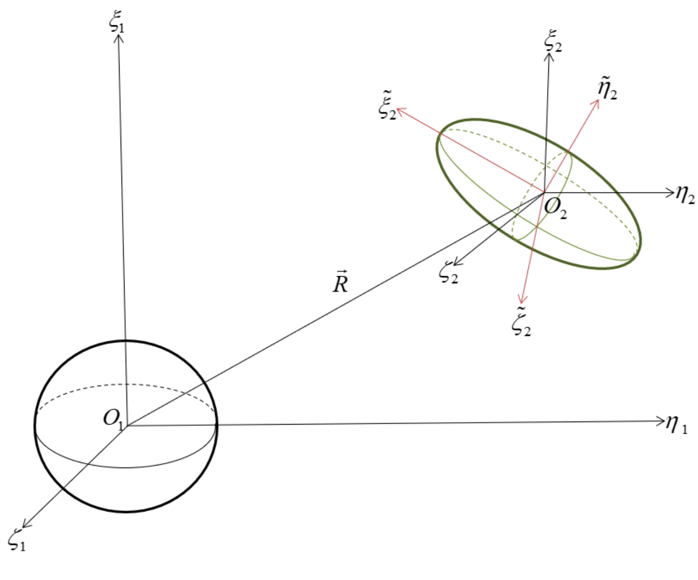
2.1.2 Салыстырмалы координаталар жүйесіндегі қозғалыстың теңдеулері

Өзара әсерлесетін денелердің абсолютты қозғалысының дифференциалдық теңдеулері нақты аспан денелерінің қозғалысын зерттеуде практикалық қолдану үшін өте ыңғайсыз. Астрономиялық бақылаулар бізге аспан денелерінің салыстырмалы орындары мен жылдамдықтарын ғана береді, сондықтан салыстырмалы қозғалыстарды анықтау мәселесін қою қолайлы болады.

Екі дененің массалар центрі абсолютты координаталар жүйесіне қатысты салыстырмалы қозғалады. Бұл қасиет барлық жүйе қозғалысын толығымен анықтайды және жүйенің жалпы массалар центріне қатысты оның жеке нүктелерінің қозғалысын зерттеумен шектелуге мүмкіндік береді.

Енді $O\xi\eta\zeta$ абсолютты координаталар жүйесінен $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ салыстырмалы координаталарға өтеміз, координаталар басын O_1 нүктесінен аламыз. Жаңа жүйенің координаталарын ескі жүйенің координаталарына параллель етіп аламыз, осылайша алдыңғы жүйеден (абсолютты) жаңа жүйеге (салыстырмалы) өту координаталарды параллель түрлендіру формулалары арқылы анықталады. Егер x, y, z жаңа координаталар болса, онда келесі түрлендіру формуларын аламыз:

$$x = \xi_2 - \xi_1, \quad y = \eta_2 - \eta_1, \quad z = \zeta_2 - \zeta_1,$$



2.4-сурет. Салыстырмалы координаталар жүйесі

Әрі қарай өстік симметриялы дене серіктің ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс теңдеулерін индекссіз жазамыз. Центрлік дененің инерция центріне қатысты серіктің инерция центрінің ілгерілемелі қозғалыс теңдеуін салыстырмалы координаталар жүйесінде келесі түрде жазамыз [32,40]

$$\tilde{m}(t)\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \tilde{m}(t)\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tilde{m}(t)\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{2.1.10}$$

мұндағы $\tilde{m}(t) = m_1(t)m_2(t)/(m_1(t)+m_2(t))$ – келтірілген масса, U – екі дененің тартылыс күшін анықтайтын күштік функция келесі түрде болады

$$U = U_1 + U_2, \qquad R = x^2 + y^2 + z^2, \tag{2.1.11}$$

$$U_1 = f\frac{m_1(t)m_2(t)}{R}, \qquad U_2 = fm_1(t)\frac{2A(t)+C(t)-3J}{2R^3}, \tag{2.1.12}$$

f – гравитация тұрақтысы, J – екі дененің массалар центрін қосатын $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{R}$ түзуіне қатысты өстік симметриялы дененің инерция моменті

$$J = A(t)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + C(t)\gamma^2, \tag{2.1.13}$$

мұндағы α, β, γ – $\overrightarrow{O_1O_2}$ векторының «серіктің» меншікті координаталар жүйесінің өстерімен оның бас центрлік инерция өсімен сәйкес келетін бағыттауыш косинустары.

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_{11}\frac{x}{R} + a_{21}\frac{y}{R} + a_{31}\frac{z}{R} = \cos\left(\vec{R}\,{}^\wedge\overrightarrow{O_2\xi_2}\right),\\
\beta &= a_{12}\frac{x}{R} + a_{22}\frac{y}{R} + a_{32}\frac{z}{R} = \cos\left(\vec{R}\,{}^\wedge\overrightarrow{O_2\eta_2}\right),\\
\gamma &= a_{13}\frac{x}{R} + a_{23}\frac{y}{R} + a_{33}\frac{z}{R} = \cos\left(\vec{R}\,{}^\wedge\overrightarrow{O_2\zeta_2}\right),
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

$\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}$ – $\vec{R}$ векторының $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ координаттар жүйесінің айналмайтын өстеріне қатысты бағыттауыш косинустары

a_{ij} – $O_2\tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_2\tilde{\zeta}_2$ қозғалмалы және $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ қозғалмайтын координаттар жүйелерінің арасындағы бұрыштардың косинустары

$$a_{11} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta = \cos\left(\overrightarrow{O_2\tilde{\xi}_2} \wedge \overrightarrow{O_2\xi_2}\right),$$

$$a_{21} = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta = \cos\left(\overrightarrow{O_2\tilde{\xi}_2} \wedge \overrightarrow{O_2\eta_2}\right),$$

$$
\begin{aligned}
&a_{31} = \sin\varphi\sin\theta = \cos\left(\overrightarrow{O_2\tilde{\xi}_2} \wedge \overrightarrow{O_2\zeta_2}\right),\\
&a_{12} = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta = \cos\left(\overrightarrow{O_2\tilde{\eta}_2} \wedge \overrightarrow{O_2\xi_2}\right),\\
&a_{22} = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta = \cos\left(\overrightarrow{O_2\tilde{\eta}_2} \wedge \overrightarrow{O_2\eta_2}\right),\\
&a_{32} = \cos\varphi\sin\theta = \cos\left(\overrightarrow{O_2\tilde{\eta}_2} \wedge \overrightarrow{O_2\zeta_2}\right),\\
&a_{13} = \sin\psi\sin\theta = \cos\left(\overrightarrow{O_2\tilde{\zeta}_2} \wedge \overrightarrow{O_2\xi_2}\right),\\
&a_{23} = -\cos\psi\sin\theta = \cos\left(\overrightarrow{O_2\tilde{\zeta}_2} \wedge \overrightarrow{O_2\eta_2}\right),\\
&a_{33} = \cos\theta = \cos\left(\overrightarrow{O_2\tilde{\zeta}_2} \wedge \overrightarrow{O_2\zeta_2}\right),
\end{aligned} \tag{2.1.15}
$$

Серіктің массалар центрі төңірегіндегі айналмалы қозғалысы Эйлер айнымалыларында келесі түрде болады [32,39,41]

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\big(A(t)p\big) - \big(A(t) - C(t)\big)qr = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left[\frac{\partial U}{\partial\psi} - \cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right] + \cos\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta},\\
&\frac{d}{dt}\big(A(t)q\big) - \big(C(t) - A(t)\big)rp = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left[\frac{\partial U}{\partial\psi} - \cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right] - \sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta},\\
&\frac{d}{dt}\big(C(t)r\big) = 0,
\end{aligned} \tag{2.1.16}
$$

$p = p_2,\ q = q_2,\ r = r_2$ – екінші дененің айналмалы қозғалысының бұрыштық жылдамдығының меншікті координата жүйесінің өстеріне проекциялары. Сәйкесінше Эйлердің кинематикалық теңдеуін келесі түрде жазамыз.

$$
\begin{aligned}
&p = \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi,\\
&q = \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi,\\
&r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},
\end{aligned} \tag{2.1.17}
$$

$\varphi = \varphi_2,\ \psi = \psi_2,\ \theta = \theta_2$ – Эйлер бұрыштары [1,4,11]. Алынған (2.1.10)-(2.1.17) теңдеулері қарастырылып отырған мәселедегі бейстационар өстік симметриялы дененің бейстационар центрлік өрістегі ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын салыстырмалы координаталар жүйесінде толық сипаттайды.

Қарастырылған мәселенің массасы және өлшемдері тұрақты болған дербес жағдайда бірнеше классикалық интегралдар бар. Ал, массасы және өлшемдері айнымалы біздің қарастырылған мәселеде ол интегралдар жоқ. Тек қана геометриялық бір ғана интеграл $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ бар.

Қарастырылып отырған мәселенің қойылымы өте күрделі, сондықтан оны зерттеу үшін ұйытқу теориясының әдістерін қолданамыз.

2.2 Кеплер-Эйлер элементтер аналогтарындағы ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс теңдеулері

Өстік симметриялы дененің массалар центрінің ілгерілемелі қозғалысын әрі қарай квазиконустық қима бойымен апериодтық қозғалыстың оскуляциялаушы элементтерінде сипаттаймыз. (2.1.7) теңдеуді келесідей түрде жазамыз [40]

$$\ddot{\vec{R}}+f\frac{m_1+m_2}{R^3}\vec{R}-b\vec{R}=grad_R W, \tag{2.2.1}$$

мұндағы W – өстік симметриялы дененің ұйытқушы күштік функциясы

$$W=-\frac{1}{2}bR^2+\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\tilde{U}, \tag{2.2.2}$$

$$b=b(t_0)=\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma}=(m_1+m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{m_1+m_2}\right),\quad \sigma=\sigma(t)=\frac{m_1(t_0)+m_2(t_0)}{m_1(t)+m_2(t)}, \tag{2.2.3}$$

(2.2.1) теңдеуді ρ,δ,λ жаңа айнымалыларға көшіреміз [32]

$$x=\sigma\rho\cos\delta\cos\lambda,\qquad y=\sigma\rho\cos\delta\sin\lambda,\qquad z=\sigma\rho\sin\delta, \tag{2.2.4}$$

Кинетикалық энергияының өрнегі

$$T=\frac{1}{2}\tilde{m}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right), \tag{2.2.5}$$

Кинетикалық энергияның өрнегі $\tilde{m}=\tilde{m}(t)$ келтірілген масса мен жаңа айнымалыларда келесідей болады

$$T=\frac{1}{2}\tilde{m}\left[\sigma^2\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\delta}^2+\rho^2\cos^2\delta\dot{\lambda}^2\right)+2\left(\sigma\dot{\sigma}\rho\dot{\rho}+\frac{1}{2}\dot{\sigma}^2\rho^2\right)\right],$$

Келесідей белгілейміз

$$U^* = f\frac{m_1m_2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{2}b\left(x^2+y^2+z^2\right) + W,$$

Айнымалылардағы қозғалыс теңдеулері

$$\rho, \qquad P_\rho = \frac{\partial T}{\partial\dot\rho} = \tilde m\sigma^2\dot\rho + \tilde m\sigma\dot\sigma\rho,$$

$$\delta, \qquad P_\delta = \frac{\partial T}{\partial\dot\delta} = \tilde m\sigma^2\rho^2\dot\delta,$$

$$\lambda, \qquad P_\lambda = \frac{\partial T}{\partial\dot\lambda} = \tilde m\sigma^2\rho^2\cos^2\delta\dot\sigma,$$

келесідей жартылай канондық түрде жазуға да болады

$$\dot\rho = \frac{\partial H}{\partial P_\rho}, \qquad \dot P_\rho = -\frac{\partial H}{\partial\rho} + \frac{\dot{\tilde m}}{\tilde m}P_\rho,$$

$$\dot\delta = \frac{\partial H}{\partial P_\delta}, \qquad \dot P_\delta = -\frac{\partial H}{\partial\delta} + \frac{\dot{\tilde m}}{\tilde m}P_\delta,$$

$$\dot\lambda = \frac{\partial H}{\partial P_\lambda}, \qquad \dot P_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial\lambda} + \frac{\dot{\tilde m}}{\tilde m}P_\lambda,$$

$$\dot\rho = \frac{1}{\tilde m\sigma^2}P_\rho - \frac{\dot\sigma}{\sigma}\rho, \qquad \dot\delta = \frac{1}{\tilde m\sigma^2\rho^2}P_\delta, \qquad \dot\lambda = \frac{1}{\tilde m\sigma^2\rho^2\cos^2\delta}P_\lambda,$$

сәйкесінше

$$H = \frac{1}{2\tilde m\sigma^2}\left[\left(P_\rho - \tilde m\sigma\dot\sigma\rho\right)^2 + \frac{P_\delta^2}{\rho^2} + \frac{P_\lambda^2}{\rho^2\cos^2\delta}\right] - U^{**},$$

$$U^{**} = f\frac{m_1m_2}{\sigma\rho} + \frac{1}{2}\left(b\sigma^2 + \tilde m\dot\sigma^2\right)\rho^2 + W,$$

Жаңа импульстарды енгіземіз

$$P_\rho = \gamma\tilde P_\rho, \qquad P_\delta = \gamma\tilde P_\delta, \qquad P_\lambda = \gamma\tilde P_\lambda, \tag{2.2.6}$$

$$\gamma = \gamma(t) = \frac{\tilde{m}}{\tilde{m}_0} = \frac{\tilde{m}(t)}{\tilde{m}_0(t)},$$

қозғалыс теңдеуін канондық түрде жазамыз

$$\begin{aligned} &\dot{\rho} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{P}_\rho}, \qquad \dot{\delta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{P}_\delta}, \qquad \dot{\lambda} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{P}_\lambda}, \\ &\dot{\tilde{P}}_\rho = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \rho}, \quad \dot{\tilde{P}}_\delta = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \delta}, \quad \dot{\tilde{P}}_\lambda = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda}, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

мұндағы

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}_1, \tag{2.2.8}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 = \frac{\gamma}{2\tilde{m}\sigma^2}\left[\left(\tilde{P}_\rho - \frac{\tilde{m}\sigma\dot{\sigma}}{\gamma}\rho\right)^2 + \frac{\tilde{P}_\delta^2}{\rho^2} + \frac{\tilde{P}_\lambda^2}{\rho^2\cos^2\delta}\right] - \\ - f\,\frac{m_1 m_2}{\gamma\sigma\rho} - \frac{1}{\gamma}\left(b\sigma^2 + \tilde{m}\dot{\sigma}^2\right)\rho, \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

$$\tilde{H}_1 = -\frac{1}{\gamma}W. \tag{2.2.10}$$

$\tilde{H}_1 = 0\ (W = 0)$ кезінде (2.2.7)-(2.2.9) теңдеулері Гамильтон-Якоби әдісімен интегралданатын ұйытқымаған қозғалыс теңдеулерін аламыз [42-45]

$$\begin{aligned} &\dot{\rho} = \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{P}_\rho}, \qquad \dot{\delta} = \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{P}_\delta}, \qquad \dot{\lambda} = \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{P}_\lambda}, \\ &\dot{\tilde{P}}_\rho = -\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \rho}, \quad \dot{\tilde{P}}_\delta = -\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \delta}, \quad \dot{\tilde{P}}_\lambda = -\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \lambda}, \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Сәйкесінше Гамильтон-Якоби теңдеуі

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tilde{H}_0 = 0,$$

толық интеграл келесі түрде болады

$$S = -\alpha_1 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\sigma^2(t)} dt + \frac{\tilde{m}\sigma\dot{\sigma}}{2} \rho^2 + U_1(\rho) + U_2(\delta) + U_3(\lambda),$$

мұндағы

$$U_1(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \left(2\tilde{m}_0\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2} + \frac{2\gamma^2}{\rho} \right)^{1/2} d\rho,$$

$$U_2(\delta) = \int_{0}^{\delta_1} \left(\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\delta} \right)^{1/2} d\delta,$$

$$U_3(\gamma) = \alpha_3\lambda,$$

$\tilde{m}_0 = \tilde{m}(t_0)$, ρ_1 – $2\tilde{m}_0\alpha_1\rho^2 + 2\mu^2\rho - \alpha_2^2 = 0$ теңдеуінің ең кіші түбірі, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – кез-келген тұрақтылар, мұндағы

$$\mu = f\left[m_1(t_0) + m_2(t_0) \right] = const, \qquad (2.2.12)$$

Нәтижесінде (2.2.11) жүйенің жалпы интегралы келесідей түрде болады

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \beta_3,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \rho} = \tilde{P}_\rho, \qquad \frac{\partial S}{\partial \delta} = \tilde{P}_\delta, \qquad \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \tilde{P}_\lambda,$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – жаңа тұрақтылар

(2.2.6)-шы түрлендіруді пайдаланып аралық қозғалыстың (2.2.11) жалпы интегралын келесі түрде жазамыз

$$\int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{2\tilde{m}_0\alpha_1 + 2\dfrac{\mu^2}{\rho} - \dfrac{\alpha_2^2}{\rho^2}}} = \phi(t) + \beta_1,$$

$$\alpha_2 \int_{0}^{\varsigma_1} \frac{d\delta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \dfrac{\alpha_3^2}{\cos^2\delta}}} - \alpha_2 \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\tilde{m}_0\alpha_1 + 2\dfrac{\mu^2}{\rho} - \dfrac{\alpha_2^2}{\rho^2}}} = \beta_2, \qquad (2.2.13)$$

$$\lambda - \alpha_3 \int_0^{\varsigma} \frac{d\delta}{\cos^2\delta \sqrt{\alpha_2^2 - \dfrac{\alpha_3^2}{\cos^2\delta}}} = \beta_3,$$

$$\sqrt{2\tilde{m}_0 \alpha_1 + 2\frac{\mu^2}{\rho} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}} = \frac{\sigma^2}{\gamma}\dot{\rho},$$

$$\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\delta}} = \frac{\sigma^2}{\gamma}\rho^2\dot{\delta}, \tag{2.2.14}$$

$$\alpha_3 = \frac{\sigma^2}{\gamma}\rho^2 \cos^2\delta \cdot \dot{\lambda},$$

мұндағы $\phi(t)$ функциясы – $\left[\sigma(t)\right]^{-2}$ функциясының алғашқы функциясы.

(2.2.13), (2.2.14) қатынастарында аралық қозғалыстың жалпыланған интегралына қажетті алты кез келген тұрақтылар өрнектелген

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \tag{2.2.15}$$

Бұл айнымалылар массалары тұрақты классикалық екі дене есебінің Якоби элементтер аналогы болып табылады.

(2.2.13), (2.2.14) интегралдарынан ұйытқымаған қозғалыстың формулаларын аламыз, яғни квазиконустық қима бойымен апериодтық қозғалыс келесідей түрде болады [45]

$$R = \sigma(t)\rho, \quad u = \upsilon + \omega, \quad p = a\left(1 - e^2\right),$$

$$\rho = \rho(t) = \frac{p}{1 + e\cos\upsilon}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}, \tag{2.2.16}$$

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}(t) = \frac{1}{\tilde{m}_0(t)\sigma^2(t)} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{p}} e\sin\upsilon, \tag{2.2.17}$$

$$\dot{u} = \frac{1}{\tilde{m}_0(t)\sigma^2(t)} \cdot \frac{\mu\sqrt{p}}{\rho^2}, \tag{2.2.18}$$

мұндағы υ – шын аномалия, a, e, ω – ұйытқымаған қозғалыстың орбита элементтері.

(2.2.16), (2.2.18) қатынастарынан белгілі

$$\int_0^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2} = \frac{\mu}{\tilde{m}_0 p^{3/2}}\left[\phi(t)-\phi(\tau)\right], \tag{2.2.19}$$

жоғарыда атап өтілгендей, мұндағы $\phi(t)$ функциясы – $\left[\sigma(t)\right]^{-2}$ функциясының алғашқы функциясы, τ – перицентрден кез-келген нүктеге дейінгі ұшу уақыты.

Қарастырылған аралық қозғалыстың – квазиконустық қима бойымен апериодтық қозғалыстың жалпы талдауы [16] жұмысында орындалған. Квазиэллиптикалық қозғалыс жағдайында

$$e<1, \tag{2.2.20}$$

келесі түрлендіруді пайдаланып

$$tg\frac{\upsilon}{2} = \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\,tg\frac{E}{2}, \tag{2.2.21}$$

(2.2.19) теңдеуінен белгілі Кеплер теңдеуін алуға болады

$$E - e\sin E = M, \tag{2.2.22}$$

Сондай-ақ, E эксцентрлік және M орташа аномалияларының уақытқа тәуелділігі денелердің массаларының өзгеру заңдылығымен анықталады

$$E = E(t), \qquad M = n\left[\phi(t)-\phi(\tau)\right], \tag{2.2.23}$$

Сондықтан (2.2.23) формуладағы $\phi(t)$ алғашқы функциясы келесідей түрде болады

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\sigma^2(t)} = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{m_1(t)+m_2(t)}{m_1(t_0)+m_2(t_0)}\right)^2 dt, \tag{2.2.24}$$

(2.2.23) теңдеуде τ арқылы перицентрден өту уақыты белгіленген.

Сәйкесінше, n – орташа бұрыштық жылдамдық, μ – гравитациялық параметр

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} = const, \qquad \mu = f\left[m_1(t_0) + m_2(t_0)\right] = const, \tag{2.2.25}$$

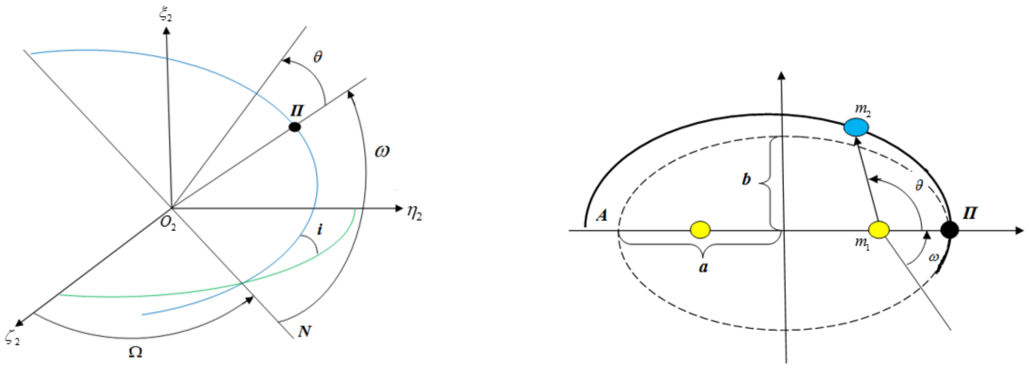
Ұйытқымаған қозғалыста орташа бұрыштық жылдамдық тұрақты емес және дене массасының өзгеру заңдарына тәуелді екенін ескереміз:

$$\dot{M} = n\left(\frac{1}{\sigma^2(t)}\right) = n\left(\frac{m_1(t) + m_2(t)}{m_1(t_0) + m_2(t_0)}\right)^2, \tag{2.2.26}$$

Шамалар

$$a, \quad e, \quad \omega, \quad \Omega, \quad i, \quad \phi(\tau), \tag{2.2.27}$$

орбита элементтері – сәйкесінше кеплер элементтер аналогы.



2.5-сурет. Орбита элементтері

Мұнда негізгі жазықтық пен орбита жазықтығы O_2N түйін сызығында қиылысады. A – апоцентр аналогы, Π – перицентр аналогы, a – элипстің үлкен жарты өсінің аналогы, b – элипстің кіші жарты өсінің аналогы, e – эксцентриситет аналогы, ω – перицентр мен түйін сызығының арасындағы бұрыш, яғни перицентр аргументінің анологы, $\phi(\tau)$ – перицентрден кез-келген нүктеге дейінгі ұшу уақытының аналогы (τ – перицентрден кез-келген нүктеге дейінгі ұшу уақыты), i – орбита жазықтығының негізгі жазықтыққа көлбеулік бұрышының аналогы, Ω – жарқырау түйіні бойлығының аналогы, M – орташа аномалия, n – орташа бұрыштық жылдамдық.

(2.2.27) элементтері (2.2.15) Якоби элементтерінің аналогтарымен мына қатынастар арқылы байланысты [32]

$$-2\alpha_1 = \frac{\beta^2}{\tilde{m}_0 a}, \qquad \alpha_2 = \beta\sqrt{p}, \qquad \alpha_3 = \beta\sqrt{p}\cos i,$$
$$\beta_1 = -\phi(\tau), \qquad \beta_2 = \omega, \qquad \beta_3 = \Omega, \tag{2.2.28}$$

Координаталар мен жылдамдықтарды $\tilde{m}(t)$ келтірілген массамен былай жазуға болады

$$x = \sigma\rho[\cos u \cdot \cos\Omega - \sin u \cdot \sin\Omega \cdot \cos i],$$
$$y = \sigma\rho[\cos u \cdot \sin\Omega + \sin u \cdot \cos\Omega \cdot \cos i], \tag{2.2.29}$$
$$z = \sigma\rho[\sin u \cdot \sin i], \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \sigma^2\rho^2,$$

$$\dot{x} = \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)x + \sigma\rho\dot{u}[-\sin u \cdot \cos\Omega - \cos u \cdot \sin\Omega \cdot \cos i],$$
$$\dot{y} = \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)y + \sigma\rho\dot{u}[-\sin u \cdot \sin\Omega + \cos u \cdot \cos\Omega \cdot \cos i], \tag{2.2.30}$$
$$\dot{z} = \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)z + \sigma\rho\dot{u}[\cos u \cdot \sin i].$$

Өстік симметриялы дененің ($A = B$) меншікті массалар центрінің төңірегіндегі айналмалы қозғалысын оскуляциялаушы Андуайе элементтер аналогында сипаттаймыз. Бұл жағдайда ұйытқымаған қозғалыс Эйлер-Пуансо қозғалысының аналогы, яғни еркін бейстационар өстік симметриялы дененің меншікті инерция центрі төңірегіндегі айналмалы қозғалысы болып табылады. Жоғарыда атап өтілгендей, өзіндік координаталар жүйесінің өстері дененің бас инерция өстерімен сәйкес келеді және үш өзара перпендикуляр жазықтықтардың қиылысу сызығы бойымен бағыттаймыз.

Өстік симметриялы дененің айналмалы қозғалысының кинетикалық энергиясы Эйлер айнымалыларында келесідей болады

$$T_{вр} = \frac{1}{2}\left(A\left(p^2 + q^2\right) + Cr^2\right), \tag{2.2.31}$$

φ, θ, ψ Эйлер бұрыштық айнымалылары мен оған сәйкес $P_\varphi, P_\theta, P_\psi$ жалпыланған импульстер келесі қатынастармен байланысқан

$$P_{\psi} = \frac{\partial T_{вр}}{\partial \dot{\psi}} = \left(Ap\sin\varphi + Bq\cos\varphi \right)\sin\theta + Cr\cos\theta,$$

$$P_{\theta} = \frac{\partial T_{вр}}{\partial \dot{\theta}} = \left(Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi \right), \tag{2.2.32}$$

$$P_{\varphi} = \frac{\partial T_{вр}}{\partial \dot{\varphi}} = Cr,$$

$\vec{K} - O$ нүктесіне қатысты алынған кинетикалық момент векторы болсын. $\vec{K}$ кинетикалық момент векторының $O_2\tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_2\tilde{\zeta}_2$ қозғалмалы өзіндік координата өстеріне проекциялары

$$K_{\tilde{\xi}_2} = K_{\vec{i}} = Ap,$$
$$K_{\tilde{\eta}_2} = K_{\vec{j}} = Bq, \tag{2.2.33}$$
$$K_{\tilde{\zeta}_2} = K_{\vec{k}} = Cr,$$

Соңғы екі теңдеу $Ap,\ Aq,\ Cr$ табу үшін қажет, онда

$$Ap = \frac{1}{\sin\theta}\left(P_{\psi} - P_{\varphi}\cos\theta \right)\sin\varphi + P_{\theta}\cos\varphi,$$
$$Bq = \frac{1}{\sin\theta}\left(P_{\psi} - P_{\varphi}\cos\theta \right)\cos\varphi - P_{\theta}\sin\varphi, \tag{2.2.34}$$
$$Cr = P_{\varphi},$$

бұдан шығатыны

$$K_{\tilde{\xi}_2}^2 + K_{\tilde{\eta}_2}^2 + K_{\tilde{\zeta}_2}^2 = P_{\theta}^2 + P_{\varphi}^2 + \left(P_{\psi} - P_{\varphi}\cos\theta \right)^2 / \sin^2\theta. \tag{2.2.35}$$

Дененің қозғалысын Эйлердің канондық айнымалылары арқылы канондық теңдеулермен жазайық

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial F}{\partial P_{\varphi}}, \qquad \dot{P}_{\varphi} = -\frac{\partial F}{\partial \varphi},$$
$$\dot{\theta} = \frac{\partial F}{\partial P_{\theta}}, \qquad \dot{P}_{\theta} = -\frac{\partial F}{\partial \theta}, \tag{2.2.36}$$
$$\dot{\psi} = \frac{\partial F}{\partial P_{\psi}}, \qquad \dot{P}_{\psi} = -\frac{\partial F}{\partial \psi},$$

мұндағы F гамильтониан

$$F = P_\varphi \dot{\varphi} + P_\theta \dot{\theta} + P_\psi \dot{\psi} - L,$$

$$F = T_{вр} - U = \frac{1}{2}\left[A\left(p^2 + q^2\right) + Cr^2 \right] - U, \tag{2.2.37}$$

$L = T_{вр} + U$ – лагранжиан, $\varPi = -U$ – потенциалдық энергия.

2.3 Кеплер-Эйлер элементтер аналогтарынан Делоне-Андуайе элементтер аналогтарына көшу

$W \neq 0 \left(\tilde{H}_1 \neq 0\right)$ кезінде (2.2.15) айнымалылар жүйесіндегі (2.2.7)-(2.2.8) оскуляциялаушы элементтеріндегі ұйытқыған қозғалыстың теңдеулері келесі түрде болады

$$\dot{\alpha}_k = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \beta_k}, \qquad \dot{\beta}_k = -\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \alpha_k}, \qquad k = 1,2,3, \tag{2.3.1}$$

мұндағы

$$\tilde{W} = \frac{1}{\gamma} W\left(t, \alpha_k, \beta_k\right). \tag{2.3.2}$$

(2.3.1) түріндегі ұйтқыған қозғалыс теңдеуіндегі кемшіліктер, аспан механикасындағы массалары тұрақты денелердің классикалық ұйытқу теориясының Якоби элементтеріндегі ұйытқыған қозғалыс теңдеуінің кемшіліктеріне ұқсас. Әрі қарай (2.3.1)-(2.3.2) ұйытқыған қозғалыс теңдеулері негізінде жаңа айнымалыларды – канондық Делоне элементтерінің аналогтарын енгізу арқылы канондық ұйытқу теориясының әртүрлі теңдеулерін алуға болады.

$$L, \qquad G, \qquad H, \qquad l, \qquad g, \qquad h, \tag{2.3.3}$$

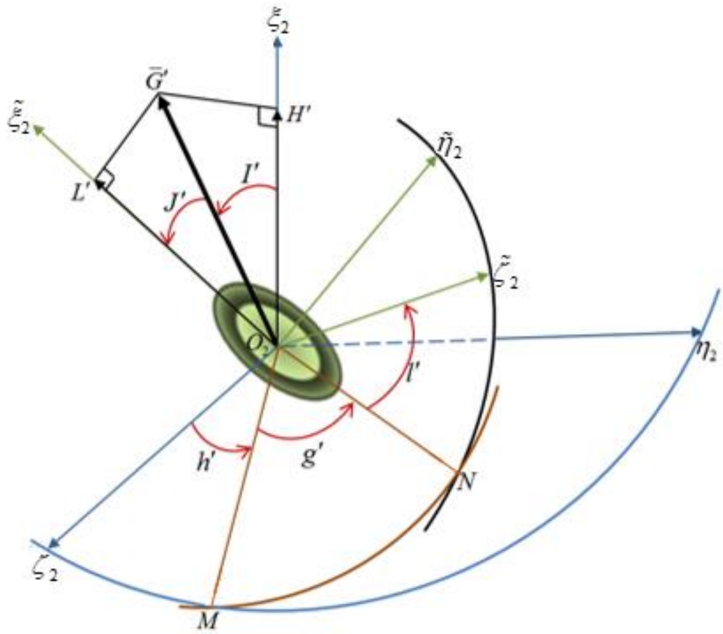
Олар мына формулалар арқылы енгізіледі

$$\begin{aligned} -2\alpha_1 &= \frac{\mu^4}{\tilde{m}_0 L^2}, \qquad \alpha_2 = G, \qquad \alpha_3 = H, \\ \beta_1 &= \frac{l}{n} - \phi(t), \qquad \beta_2 = g, \qquad \beta_3 = h. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Делоне және Кеплер элементтері арасындағы байланыс келесі қатынастар арқылы анықталады [13,32,40]

$$L = \sqrt{\mu}\sqrt{a}, \quad G = \sqrt{\mu}\sqrt{a\left(1-e^2\right)}, \quad H = \sqrt{\mu}\sqrt{a\left(1-e^2\right)}\cos i,$$
$$l = n\left[\phi(t)-\phi(\tau)\right], \quad g = \omega, \quad h = \Omega. \tag{2.3.5}$$

Кейбір жағдайларда дененің айналмалы қозғалысын зерттегенде $\psi, \varphi, \theta, P_\psi, P_\varphi, P_\theta$ Эйлер канондық айнымалыларының орнына l', g', h' бұрыштары мен оған сәйкес L', G', H' импульстарды қолданған ыңғайлы. Бұл айнымалылар жүйесін Андуайе элементтерінің аналогтары деп атайды.



2.6-сурет. Андуайе элементтер аналогы

2.6-суретте Андуайе элементтерінің геометриялық мағынасы түсіндірілген.

1. $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ – өстері абсолютты координаттар жүйесінің өстеріне параллель, қозғалмайтын Кениг координаттар жүйесі;

2. $O_2\tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_2\tilde{\zeta}_2$ – денемен қатаң байланысқан және онымен бірге қозғалатын, өстік симметриялы дененің бас инерция өстерімен сәйкес келетін өзіндік координаталар жүйесі;

3. O_2MN – $\vec{G}'$ кинетикалық момент векторына перпендикуляр, координаттар басынан өтетін жазықтық;

4. O_2M – $\vec{G}'$ кинетикалық момент векторына перпендикуляр, координат басынан өтетін, $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ қозғалмайтын координаттар жүйесінің $O_2\zeta_2\eta_2$ жазықтығы мен O_2MN жазықтығының қиылысу түзуі;

5. O_2N – $\vec{G}'$ кинетикалық момент векторына перпендикуляр, $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ қозғалмайтын координаттар жүйесінің $O_2\tilde{\zeta}_2\tilde{\eta}_2$ жазықтығы мен O_2MN жазықтығының қиылысу түзуі;

6. $\vec{G}'$ – $\vec{G}'$ кинетикалық момент векторының модулі;

7. L' – $\vec{G}'$ кинетикалық момент векторының өстік симметриялы дененің бас инерция өсінің бірі $O_2\tilde{\xi}_2$ айналмалы өсіне проекциясы;

8. H' – $\vec{G}'$ кинетикалық момент векторының кеңістікте тұрақты бағдарды сақтап тұратын $O_2\xi_2$ өсіне проекциясы;

9. l' – O_2N түйіндер сызығы мен $O_2\tilde{\zeta}_2$ өсі арасындағы бұрыш;

10. g' – O_2M және O_2N түйіндер сызығының арасындағы бұрыш;

11. h' – $O_2\zeta_2$ және O_2N түйіндер сызығының арасындағы бұрыш.

Андуайе элементерінің аналогтары айналмалы қозғалысты сипаттайды

$$L', \quad G', \quad H', \quad l', \quad g', \quad h', \tag{2.3.6}$$

Эйлердің канондық айнымалыларынан Андуайе айнымалыларына көшу үшін алдымен бізге қажетті өрнектерді Андуайе айнымалылары арқылы өрнектейміз. Ол үшін бұрыштық жылдамдықты келесі түрде жазайық

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\psi}\vec{k}_1 + \dot{\theta}\vec{e} = \dot{l}'\vec{k} + \dot{g}'\vec{s} + \dot{h}'\vec{k}_1, \tag{2.3.7}$$

Егер бұрыштық жылдамдықты $O_2\tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_2\tilde{\zeta}_2$ жүйесінің өстеріне проекцияласақ, онда келесі өрнектерді аламыз:

$$\begin{aligned} p &= \left(\vec{\omega}\cdot\vec{i}\right) = \dot{l}'\left(\vec{k}\cdot\vec{i}\right) + \dot{g}'\left(\vec{s}\cdot\vec{i}\right) + \dot{h}'\left(\vec{k}_1\cdot\vec{i}\right), \\ q &= \left(\vec{\omega}\cdot\vec{j}\right) = \dot{l}'\left(\vec{k}\cdot\vec{j}\right) + \dot{g}'\left(\vec{s}\cdot\vec{j}\right) + \dot{h}'\left(\vec{k}_1\cdot\vec{j}\right), \\ r &= \left(\vec{\omega}\cdot\vec{k}\right) = \dot{l}'\left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right) + \dot{g}'\left(\vec{s}\cdot\vec{k}\right) + \dot{h}'\left(\vec{k}_1\cdot\vec{k}\right), \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

l', g', h' бұрыштарына сәйкес келетін L', G', H' жалпыланған импульстарды келесі формулалар арқылы енгізейік:

$$L' = \frac{\partial T_{вр}}{\partial \dot{l}'}, \qquad G' = \frac{\partial T_{вр}}{\partial \dot{g}'}, \qquad H' = \frac{\partial T_{вр}}{\partial \dot{h}'}, \tag{2.3.9}$$

Соңғы өрнектің көмегімен жалпыланған импульстар үшін келесі өрнекті аламыз:

$$\begin{gathered}
L' = \frac{\partial T_{вр}}{\partial \dot{l}'} = A\left(p\frac{\partial p}{\partial \dot{l}'} + q\frac{\partial q}{\partial \dot{l}'} \right) + Cr\frac{\partial r}{\partial \dot{l}'} = \\
= \left(A\left(p\vec{i} + q\vec{j} \right) + Cr\vec{k} \right) \cdot \vec{k} = \left(\vec{G}' \cdot \vec{k} \right), \\
G' = \frac{\partial T_{вр}}{\partial \dot{g}'} = \left(\vec{G}' \cdot \vec{s} \right) = G', \qquad H' = \frac{\partial T_{вр}}{\partial \dot{h}'} = \left(\vec{G}' \cdot \vec{k}_1 \right),
\end{gathered} \tag{2.3.10}$$

Көмекші I', J' бұрыштарды енгізе отырып, соңғы (2.3.10)-шы формуланы пайдалансақ

$$H' = G' \cos I', \qquad L' = G' \cos J', \tag{2.3.11}$$

Енді (2.3.10)-шы формуланы пайдалана отырып екі импульстар арасындағы байланысты табайық

$$\begin{aligned}
P_{\psi} &= \left(\vec{G}' \cdot \vec{e} \right) = G' \sin J' \sin\left(l' - \varphi \right), \\
P_{\varphi} &= \left(\vec{G}' \cdot \vec{k} \right) = L', \\
P_{\theta} &= \left(\vec{G}' \cdot \vec{k} \right) = H',
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

$\vec{K}$ кинетикалық момент векторының қозғалмалы $O_2\tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_2\tilde{\zeta}_2$ өстеріне проекциялары белгілі

$$\begin{aligned}
\left(\vec{G}' \right)_{\tilde{\xi}} &= K_{\tilde{\xi}} = Ap, \\
\left(\vec{G}' \right)_{\tilde{\eta}} &= K_{\tilde{\eta}} = Aq, \\
\left(\vec{G}' \right)_{\tilde{\zeta}} &= K_{\tilde{\zeta}} = Cr,
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

$K_{\tilde{\xi}\tilde{\eta}}$ арқылы $\vec{K}$ векторының $O_2\tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_2$ жазықтығына проекциясын белгілейміз, $K_{\tilde{\xi}\tilde{\eta}}$ векторымен $O_2\xi$ өсі арасындағы бұрыш $\frac{\pi}{2} - l'$ тең екенін, ал бұл вектордың модулі мынаған тең екенін анықтаймыз:

$$K_{\tilde{\xi}\tilde{\eta}} = \sqrt{G'^2 - L'^2}, \qquad (2.3.14)$$

Бұдан

$$\begin{aligned} K_{\tilde{\xi}} &= K_{\tilde{\xi}\tilde{\eta}} \sin l', \\ K_{\tilde{\eta}} &= K_{\tilde{\xi}\tilde{\eta}} \cos l', \\ K_{\tilde{\zeta}} &= L', \end{aligned} \qquad (2.3.15)$$

Демек, жалпы жағдайда Андуайе айнымалыларындағы кинетикалық энергияның (2.2.31) өрнегін жалпы түрде келесідей жазуға болады

$$T_{вр} = \frac{1}{2}\left(G'^2 - L'^2\right)\left[\frac{\sin^2 l'}{A} + \frac{\cos^2 l'}{B}\right] + \frac{L'^2}{2C}, \qquad (2.3.16)$$

Өстік симметриялы дене жағдайында (2.3.16) өрнек айтарлықтай жеңілдейді

$$T_{вр} = \frac{1}{2A}\left(G'^2 - L'^2\right) + \frac{L'^2}{2C}. \qquad (2.3.17)$$

Ары қарай p, q, r және φ, θ, ψ Эйлер бұрыштарын және a_{ij} бағыттауыш косинустарды Андуайе айнымалылары арқылы өрнектеп жазуға болады

$$p = \frac{\sqrt{G'^2 - L'^2}}{A}\sin l', \qquad q = \frac{\sqrt{G'^2 - L'^2}}{B}\cos l', \qquad r = \frac{L'}{C}, \qquad (2.3.18)$$

$$\theta = \arccos\left(a_{33}\right), \qquad \varphi = arctg\left(\frac{a_{31}}{a_{32}}\right), \qquad \psi = \frac{pa_{31} + qa_{32}}{a_{31}^2 + a_{32}^2}, \qquad (2.3.19)$$

$O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ қозғалмайтын координаталар жүйесі мен өстік симметриялы денемен байланысқан $O_2\tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_2\tilde{\zeta}_2$ қозғалмалы координаталар жүйесінің арасындағы бұрыштардың косинустары келесідей анықталады:

$$a_{11} = \cos h' \cos g' \cos l' - \cos h' \cos J' \sin g' \sin l' - \sin h' \cos I' \cos l' \sin g' -$$
$$- \sin h' \cos I' \cos g' \cos J' \sin l' + \sin h' \sin I' \sin l' \sin J',$$
$$a_{21} = \sin h' \cos g' \cos l' - \sin h' \cos J' \sin g' \sin l' + \cos h' \cos I' \cos l' \sin g' +$$
$$+ \cos h' \cos I' \cos g' \cos J' \sin l' - \cos h' \sin I' \sin l' \sin J',$$
$$a_{31} = \sin I' \sin g' \cos l' + \sin I' \cos J' \cos g' \sin l' - \cos I' \sin l' \sin J',$$

$$a_{12} = -\cos h' \cos J' \cos l' \sin g' - \cos h' \cos g' \sin l' - \sin h' \cos I' \cos g' \cos l' \cos J' +$$
$$+ \sin h' \cos I' \sin g' \sin l' + \sin h' \sin I' \cos l' \sin J',$$
$$a_{22} = -\sin h' \cos J' \cos l' \sin g' - \sin h' \cos g' \sin l' + \cos h' \cos I' \cos g' \cos l' \cos J' -$$
$$- \cos h' \cos I' \sin g' \sin l' - \cos h' \sin I' \cos l' \sin J',$$
$$a_{32} = \sin I' \cos J' \cos l' \cos g' - \sin I' \sin g' \sin l' + \cos I' \cos l' \sin J',$$

$$a_{13} = \cos h' \sin J' \sin g' - \sin h' \sin I' \cos J' + \sin h' \cos I' \cos g' \sin J',$$
$$a_{23} = \sin h' \sin J' \sin g' - \cos h' \sin I' \cos J' - \cos h' \cos I' \cos g' \sin J',$$
$$a_{33} = \cos I' \cos J' - \sin I' \cos g' \sin J',$$

мұндағы

$$\cos I' = \frac{H'}{G'}, \qquad \sin I' = \sqrt{1 - \frac{H'^2}{G'^2}}, \qquad \cos J' = \frac{L'}{G'}, \qquad \sin J' = \sqrt{1 - \frac{L'^2}{G'^2}}. \tag{2.3.20}$$

2.4 Делоне-Андуайе элементтер аналогтарындағы ұйытқыған ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс теңдеулері

Өстік симметриялы дененің массалар центрінің қозғалыс теңдеулері, яғни ұйытқыған қозғалыс теңдеулері оскуляциялаушы Делоне элементтерінде келесідей түрде болады [39,40,46]

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{\partial W}{\partial l}, & \dot{G} &= \frac{\partial W}{\partial g}, & \dot{H} &= \frac{\partial W}{\partial h}, \\ \dot{l} &= -\frac{\partial W}{\partial L}, & \dot{g} &= -\frac{\partial W}{\partial G}, & \dot{h} &= -\frac{\partial W}{\partial H}, \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

сәйкесінше

$$W = \frac{1}{\sigma^2(t)} \frac{\mu^2}{2L^2} + W^*, \tag{2.4.2}$$

$$W^{*} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \tilde{U} - \frac{1}{2} b R^2 \right), \tag{2.4.3}$$

Белгілі геометриялық интеграл $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ біздің жағдайда да бар. $\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2$ қатынасын ескере отырып, (2.1.12), (2.1.13), (2.4.3) формулалардан келесі өрнекті аламыз [40]

$$W^{*} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left(\frac{f m_1}{2} (C - A) \left[\frac{1}{R^3} \right] - \frac{3 f m_1}{2} (C - A) \left[\frac{\gamma^2}{R^3} \right] \right) - \frac{1}{2} b \left[R^2 \right]. \tag{2.4.4}$$

(2.4.4)-формуланың оң жағындағы тік жақшаға алынған шамалар Делоне-Андуайе оскуляциялаушы элементтері арқылы өрнектелуі керек.

(2.3.3) Делоне канондық элементтер жүйесі аналогында жазылған, (2.4.1) ұйытқыған қозғалыс теңдеуі арқылы әртүрлі канондық элементтер жүйесін енгізуге болады.

Өстік симметриялы дененің меншікті инерция центрінің төңірегіндегі айналмалы қозғалысы оскуляциялаушы Андуайе элементтерінің ұйытқыған қозғалыс теңдеулерімен анықталады [40,46]

$$\begin{aligned} \dot{L}' &= -\frac{\partial F}{\partial l'}, & \dot{G}' &= -\frac{\partial F}{\partial g'}, & \dot{H}' &= -\frac{\partial F}{\partial h'}, \\ \dot{l}' &= \frac{\partial F}{\partial L'}, & \dot{g}' &= \frac{\partial F}{\partial G'}, & \dot{h}' &= \frac{\partial F}{\partial H'}, \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Демек, өстік симметриялы дененің айналмалы қозғалысының Гамильтонианы келесі түрде жазылуы мүмкін

$$F = F_{нв} + F_{воз} \tag{2.4.6}$$

мұндағы

$$F_{нв} = \frac{1}{2A} \left(G'^2 - L'^2 \right) + \frac{L'^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{G'^2}{A} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L'^2, \tag{2.4.7}$$

$$F_{воз} = \tilde{U} - \frac{1}{2} b R^2. \tag{2.4.8}$$

(2.4.5), (2.4.6) канондық теңдеулер жүйесі дененің ұйытқыған айналмалы қозғалыс теңдеулері болып табылады.

2.5 Делоне-Андуайе элементтер аналогтарындағы ұйытқымаған ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс теңдеуі

Егер (2.4.1), (2.4.5) теңдеулеріндегі ұйытқушы функция нөлге тең болса, онда Делоне-Андуайе элементтеріндегі бейстационар өстік симметриялы дененің ұйытқымаған ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының теңдеулерін аламыз [40,46].

Ұйытқымаған ілгерілемелі қозғалыс Делоне элементтеріндегі квазиконусты қима бойымен апериодтық қозғалыстың ұйытқымаған теңдеулерімен сипатталады

$$L = L_0 = const, \qquad G = G_0 = const, \qquad H = H_0 = const, \tag{2.5.1}$$

$$\begin{gathered} l = \frac{\mu^2}{L^3}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{m_1(t)+m_2(t)}{m_1(t_0)+m_2(t_0)}\right]dt + l_0, \quad l_0 = const, \\ g = g_0 = const, \qquad h = h_0 = const, \end{gathered} \tag{2.5.2}$$

Ұйытқымаған айналмалы қозғалыс Эйлер-Пуансо қозғалысының аналогы – еркін бейстационар өстік симметриялы дененің өзіндік инерция центрінің төңірегіндегі айналмалы қозғалысы болып табылады. Андуайе элементтеріндегі ұйытқымаған айналмалы қозғалыстың теңдеулері келесідей болады

$$L' = L'_0 = const, \qquad G' = G'_0 = const, \qquad H' = H'_0 = const, \tag{2.5.3}$$

$$\begin{gathered} l' = L'\int_{t_0}^{t}\left[\frac{A(t)-C(t)}{A(t)C(t)}\right]dt + l'_0, \quad l'_0 = const, \\ g' = G'\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{A(t)} + g'_0, \qquad g'_0 = const, \qquad h' = h'_0 = const. \end{gathered} \tag{2.5.4}$$

(2.5.4) формулалардан көрініп тұрғандай, созылған (сығылған) $A(t) < C(t)$ өстік симметриялы дененің динамикалық пішіні сығылады (созылады) және оның инерция эллипсоиды сфералық ($A(t) = C(t)$), $\dot{l}'$ меншікті айналу бұрышының жылдамдығы нөлге тең болады. Одан кейінгі моменттерде сығылған (созылған) $A(t) > C(t)$ өстік симметриялы дененің динамикалық пішіні өзгереді, $\dot{l}'$ өзіндік айналу бұрышының жылдамдығы таңбасын өзгертеді және дене қарама-қарсы бағытта айнала бастайды. Бұл құбылысты ұйытқыған қозғалыста зерттеу қызықты.

2.6 Күштік функцияның оскуляциялаушы элементтер арқылы өрнектелуі

(2.4.2), (2.4.3) өрнектерді келесідей түрде қайта жазайық [40,46]

$$W=\frac{1}{\sigma^2(t)}\cdot\frac{\mu^2}{2L^2}+\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{fm_1(C-A)}{2\sigma^3}\left[\frac{1}{\rho^3}\right]-\frac{3fm_1(C-A)}{2\sigma^3}\left[\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right]\right)-\frac{1}{2}b\sigma^2\left[\rho^2\right], \tag{2.6.1}$$

Сол сияқты (2.4.6)-(2.4.8) өрнектерін де жазуға болады

$$F=\frac{1}{2}\frac{G'^2}{A}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L'^2+\frac{fm_1(C-A)}{2\sigma^3}\left[\frac{1}{\rho^3}\right]-$$
$$-\frac{3fm_1(C-A)}{2\sigma^3}\left[\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right]-\frac{1}{2}b\sigma^2\left[\rho^2\right], \tag{2.6.2}$$

мұндағы

$$\frac{1}{\rho^3}=\frac{(1+e\cos\upsilon)^3}{a^3\left(1-e^2\right)^3}, \tag{2.6.3}$$

$$\gamma=c_{13}\frac{x}{R}+c_{23}\frac{y}{R}+c_{33}\frac{z}{R}, \tag{2.6.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{x}{R}&=\tau_{11}\sin\upsilon+\tau_{12}\cos\upsilon,\\ \frac{y}{R}&=\tau_{21}\sin\upsilon+\tau_{22}\cos\upsilon,\\ \frac{z}{R}&=\tau_{31}\sin\upsilon+\tau_{32}\cos\upsilon,\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

$$\begin{aligned}c_{13}&=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}\sin g'+\varepsilon_{13}\cos g',\\ c_{23}&=\varepsilon_{21}+\varepsilon_{22}\sin g'+\varepsilon_{23}\cos g',\\ c_{33}&=\varepsilon_{31}+\varepsilon_{32}\sin g'+\varepsilon_{33}\cos g',\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Сәйкесінше келесідей жазуға болады

$$\frac{\gamma^2}{\rho^3}=\frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^3}{a^3\left(1-e^2\right)^3}\cdot\Big[\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}\sin g'+\varepsilon_{13}\cos g'\right)\left(\tau_{11}\sin\upsilon+\tau_{12}\cos\upsilon\right)+$$

$$+\left(\varepsilon_{21}+\varepsilon_{22}\sin g'+\varepsilon_{23}\cos g'\right)\left(\tau_{21}\sin\upsilon+\tau_{22}\cos\upsilon\right)+ \tag{2.6.7}$$

$$+\left(\varepsilon_{31}+\varepsilon_{32}\sin g'+\varepsilon_{33}\cos g'\right)\left(\tau_{31}\sin\upsilon+\tau_{32}\cos\upsilon\right)\Big]^2,$$

мұндағы

$$\varepsilon_{11}=\frac{L'\sqrt{G'^2-H'^2}}{G'^2}\sinh',\quad \varepsilon_{12}=\frac{\sqrt{G'^2-L'^2}}{G'}\cosh',\quad \varepsilon_{13}=\frac{H'\sqrt{G'^2-L'^2}}{G'^2}\sinh',$$

$$\varepsilon_{21}=\frac{L'\sqrt{G'^2-H'^2}}{G'^2}\cosh',\quad \varepsilon_{22}=\frac{\sqrt{G'^2-L'^2}}{G'}\sinh',\quad \varepsilon_{23}=\frac{H'\sqrt{G'^2-L'^2}}{G'^2}\cosh', \tag{2.6.8}$$

$$\varepsilon_{31}=\frac{L'H'}{G'^2},\quad \varepsilon_{33}=\frac{\sqrt{G'^2-H'^2}\sqrt{G'^2-L'^2}}{G'^2},$$

$$\tau_{11}=-\cosh\sin g-\frac{H}{G}\sinh\cos g,\qquad \tau_{12}=\cosh\cos g-\frac{H}{G}\sinh\sin g,$$

$$\tau_{21}=-\sinh\sin g+\frac{H}{G}\cosh\cos g,\qquad \tau_{22}=\sinh\cos g+\frac{H}{G}\cosh\sin g, \tag{2.6.9}$$

$$\tau_{31}=\cos g\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}},\qquad \tau_{32}=\sin g\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}.$$

Жоғарыда келтірілген формулаларға сәйкес (2.6.1), (2.6.2) формулаларында тік жақшадағы аналитикалық өрнектер Делоне-Андуайе элементтері арқылы өрнектеледі. Сондықтан (2.4.1) және (2.4.5) теңдеулерінің оң жағын Делоне-Андуайе элементтері арқылы өрнектеуге болады. Бұл теңдеулер Делоне-Андуайе айнымалыларындағы бейстационар өстік симметриялы дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын толығымен анықтайды.

2.7 Орташалау және ғасырлық ұйытқудың дифференциялдық теңдеулерін алу

Резонанссыз жағдайды қарастырамыз. (2.4.1) және (2.4.5) теңдеулерінің оң жағын g', l жылдам айнымалылары бойынша орташалап, қарастырылып отырған мәселедегі бейстационар өстік симметриялы дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының ғасырлық ұйытқу теңдеулерін аламыз. Егер W, F ұйытқушы функцияның ғасырлық бөлігін $W_{век}, F_{век}$ арқылы белгілесек, онда Гаусс схемасы бойынша [40,46]

$$W_{век} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} W dl dg', \qquad F_{век} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F dl dg', \tag{2.7.1}$$

Сәйкесінше келесідей жазуға болады

$$\begin{gathered} W_{век} = \frac{\mu^2}{2\sigma^2(t)}\left(\frac{1}{L^2}\right)_{век} + \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\cdot \\ \cdot\left(\frac{fm_1(C-A)}{2\sigma^3}\left[\frac{1}{\rho^3}\right]_{век} - \frac{3fm_1(C-A)}{2\sigma^3}\left[\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right]_{век}\right) - \frac{1}{2}b\sigma^2\left[\rho^2\right]_{век}, \end{gathered} \tag{2.7.2}$$

$$\begin{gathered} F_{век} = \frac{1}{2A}\left(G'^2\right)_{век} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\left(L'^2\right)_{век} + \frac{fm_1(C-A)}{2\sigma^3}\left[\frac{1}{\rho^3}\right]_{век} - \\ - \frac{3fm_1(C-A)}{2\sigma^3}\left[\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right]_{век} - \frac{1}{2}b\sigma^2\left[\rho^2\right]_{век}, \end{gathered} \tag{2.7.3}$$

мұндағы

$$\left[\rho^2\right]_{век} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho^2 dl dg' = a^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right), \tag{2.7.4}$$

Келесі шамалардың ғасырлық ұйытқуларын есептегенде

$$\left[\frac{1}{\rho^3}\right]_{век} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dl dg'}{\rho^3}, \tag{2.7.5}$$

$$\left[\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right]_{век} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right) dl dg', \tag{2.7.6}$$

белгілі қатынасты пайдалану ыңғайлы болады

$$\frac{d\upsilon}{(1+e\cos\upsilon)^2} = \frac{dl}{\left(1-e^2\right)^{3/2}}, \tag{2.7.7}$$

(2.7.7) қатынастарын пайдаланып, (2.7.5) оң жағын есептейміз.

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dldg'}{\rho^3}=\frac{1}{4\pi^2 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+e\cos\upsilon\right)d\upsilon dg'=\frac{1}{a^3\left(1-e^2\right)}, \tag{2.7.8}$$

(2.6.7) және (2.7.7) қатынастарын пайдаланып, (2.7.6) оң жағын былай жазамыз.

$$\begin{gathered}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right)dldg'=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma^2\frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^3}{\left(1-e^2\right)^3}\frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}}{\left(1+e\cos\upsilon\right)^3}d\upsilon dg'=\\=\frac{1}{4\pi^2 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}\sin g'+\varepsilon_{13}\cos g'\right)\left(\tau_{11}\sin\upsilon+\tau_{12}\cos\upsilon\right)+\\+\left(\varepsilon_{21}+\varepsilon_{22}\sin g'+\varepsilon_{23}\cos g'\right)\left(\tau_{21}\sin\upsilon+\tau_{22}\cos\upsilon\right)+\\+\left(\varepsilon_{31}+\varepsilon_{32}\sin g'+\varepsilon_{33}\cos g'\right)\left(\tau_{31}\sin\upsilon+\tau_{32}\cos\upsilon\right)\Big]^2\left(1+e\cos\upsilon\right)d\upsilon dg',\end{gathered} \tag{2.7.9}$$

(2.7.9) формуладағы интегралдарды есептей отырып, соңында алатынымыз

$$\left[\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right]_{век}=\frac{I}{4a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}, \tag{2.7.10}$$

мұндағы

$$\begin{gathered}I=\left(\tau_{11}^2+\tau_{12}^2\right)\left(2\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{13}^2\right)+\left(\tau_{21}^2+\tau_{22}^2\right)\left(2\varepsilon_{21}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{23}^2\right)+\\\left(\tau_{31}^2+\tau_{32}^2\right)\left(2\varepsilon_{31}^2+\varepsilon_{33}^2\right)+\left(\tau_{11}\tau_{21}+\tau_{12}\tau_{22}\right)\left(4\varepsilon_{11}\varepsilon_{21}+2\varepsilon_{12}\varepsilon_{22}+2\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}\right)+\\\left(\tau_{11}\tau_{31}+\tau_{12}\tau_{32}\right)\left(4\varepsilon_{11}\varepsilon_{31}+2\varepsilon_{13}\varepsilon_{33}\right)+\left(\tau_{21}\tau_{31}+\tau_{22}\tau_{32}\right)\left(4\varepsilon_{21}\varepsilon_{31}+2\varepsilon_{23}\varepsilon_{33}\right)=\\=I\left(h,H,h',H'\right),\end{gathered} \tag{2.7.11}$$

(2.6.8), (2.6.9) формулаларды (2.7.11)-ға қоятын болсақ [47,48]

$$
\begin{aligned}
I = &-\frac{1}{2G^2G'^4}\left(-3G^2G'^4 + H^2G'^4 + G^2G'^2H'^2 -\right.\\
&-3H^2G'^2H'^2 + G^2G'^2L'^2 - 3H^2G'^2L'^2 - 3G^2L'^2H'^2 +\\
&+9H^2L'^2H'^2 - G'^2\left(G^2 - H^2\right)\left(G'^2 - L'^2\right)\cdot\cos\left[2\left(h - h'\right)\right] +\\
&+4H\sqrt{G^2 - H^2}H'\left(-2\sqrt{G'^2 - H'^2}L'^2 +\right.\\
&+\sqrt{G'^2 - L'^2}\sqrt{\left(G'^2 - H'^2\right)\left(G'^2 - L'^2\right)}\cos\left[h + h'\right] +\\
&+G^2G'^2H'^2\cos\left[2\left(h + h'\right)\right] - H^2G'^2H'^2\cos\left[2\left(h + h'\right)\right] +\\
&+2G^2G'^2L'^2\cos\left[2\left(h + h'\right)\right] - 2H^2G'^2L'^2\cos\left[2\left(h + h'\right)\right] -\\
&-3G^2H'^2L'^2\cos\left[2\left(h + h'\right)\right] + 3H^2H'^2L'^2\cos\left[2\left(h + h'\right)\right],
\end{aligned}
\tag{2.7.12}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{век} = &\frac{\mu_0^2}{2\sigma^2(t)}\left(\frac{1}{L^2}\right) + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\left(\frac{fm_1(C - A)}{2\sigma^3}\left[\frac{1}{a^3\left(1 - e^2\right)}\right]\right) -\\
&-\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\left(\frac{3fm_1(C - A)}{2\sigma^3}\left[\frac{I}{4a^3\left(1 - e^2\right)^{3/2}}\right]\right) - \frac{1}{2}b\sigma^2\left[a^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)\right],
\end{aligned}
\tag{2.7.13}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{век} = &\frac{1}{2A}\left(G'^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\left(L'^2\right) + \frac{fm_1(C - A)}{2\sigma^3}\left[\frac{1}{a^3\left(1 - e^2\right)}\right] -\\
&-\frac{3fm_1(C - A)}{2\sigma^3}\left[\frac{I}{4a^3\left(1 - e^2\right)^{3/2}}\right] - \frac{1}{2}b\sigma^2\left[a^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)\right],
\end{aligned}
\tag{2.7.14}
$$

мұндағы $a = L^2/\mu,\ 1 - e^2 = G^2/\mu a,\ I = I\left(H, h, H', h'\right).$

Енді, ғасырлық ұйытқу теңдеулері келесідей түрде болады [40]

$$
\begin{aligned}
&\dot{L}_{век} = 0, \qquad \dot{G}_{век} = 0, \qquad \dot{H}_{век} = \frac{\partial W_{век}}{\partial h_{век}},\\
&\dot{l}_{век} = -\frac{\partial W_{век}}{\partial L_{век}}, \quad \dot{g}_{век} = -\frac{\partial W_{век}}{\partial G_{век}}, \quad \dot{h}_{век} = -\frac{\partial W_{век}}{\partial H_{век}},
\end{aligned}
\tag{2.7.15}
$$

$$\dot{L}'_{век} = 0, \qquad \dot{G}'_{век} = 0, \qquad \dot{H}'_{век} = -\frac{\partial F_{век}}{\partial h'_{век}},$$
$$\dot{l}'_{век} = \frac{\partial F_{век}}{\partial L'_{век}}, \qquad \dot{g}'_{век} = \frac{\partial F_{век}}{\partial G'_{век}}, \qquad \dot{h}'_{век} = \frac{\partial F_{век}}{\partial H'_{век}}, \tag{2.7.16}$$

2.7.1 Ғасырлық ұйытқудың толық теңдеулер жүйесін талдау

Ғасырлық ұйытқуларды есептеуде мына төрт теңдеуден тұратын ішкі жүйе бөлініп шығады [40]

$$\dot{H}_{век} = \frac{\partial W_{век}}{\partial h_{век}}, \qquad \dot{h}_{век} = -\frac{\partial W_{век}}{\partial H_{век}},$$
$$\dot{H}'_{век} = -\frac{\partial F_{век}}{\partial h'_{век}}, \qquad \dot{h}'_{век} = \frac{\partial F_{век}}{\partial H'_{век}}, \tag{2.7.17}$$

(2.7.17) теңдеулер жүйесі ашық түрде келесідей болады

$$\dot{H} = -\frac{3f\left(m_1+m_2\right)\left(C-A\right)}{8\sigma^3 a^3 m_2\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I}{\partial h}\right],$$
$$\dot{h} = \frac{3f\left(m_1+m_2\right)\left(C-A\right)}{8\sigma^3 a^3 m_2\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I}{\partial H}\right],$$
$$\dot{H}' = \frac{3fm_1\left(C-A\right)}{8\sigma^3 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I}{\partial h'}\right], \tag{2.7.18}$$
$$\dot{h}' = -\frac{3fm_1\left(C-A\right)}{8\sigma^3 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I}{\partial H'}\right],$$

(2.7.18) жүйені шешкеннен кейін қалған теңдеулер интегралданады

$$\dot{L}_{век} = 0, \qquad \dot{G}_{век} = 0,$$
$$\dot{L}'_{век} = 0, \qquad \dot{G}'_{век} = 0, \tag{2.7.19}$$

(2.7.19) теңдеулерден алатынымыз

$$L = L_{век} = L_0 = const, \left(a = const\right), \quad G = G_{век} = G_0 = const, \left(e = const\right),$$
$$L' = L'_{век} = L'_0 = const, \qquad G' = G'_{век} = G'_0 = const, \tag{2.7.20}$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{l}_{век} = -\frac{\partial W_{век}}{\partial L_{век}}, \qquad \dot{g}_{век} = -\frac{\partial W_{век}}{\partial G_{век}},\\
&\dot{l}'_{век} = \frac{\partial F_{век}}{\partial L'_{век}}, \qquad \dot{g}'_{век} = \frac{\partial F_{век}}{\partial G'_{век}},
\end{aligned}
\tag{2.7.21}
$$

(2.7.21) теңдеулер жүйесі ашық түрде келесідей болады

$$
\begin{aligned}
&\dot{l} = \frac{\mu^2}{L^3\sigma^2} + \frac{b\sigma^2 L}{2\mu^2}\left(-3G^2 + 10L^2\right) + \frac{3f\left(m_1+m_2\right)\left(C-A\right)}{8\sigma^3 a^3 m_2\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[4 - 3\frac{\partial I}{\partial L}\right],\\
&\dot{g} = -\frac{3b\sigma^2 G L^2}{2\mu^3} + \frac{3f\left(m_1+m_2\right)\left(C-A\right)}{8\sigma^3 a^3 m_2\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[4 - 3I + G\frac{\partial I}{\partial G}\right],\\
&\dot{l}' = \frac{A-C}{AC}L' + \frac{3fm_1\left(C-A\right)}{8\sigma^3 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I}{\partial L'}\right],\\
&\dot{g}' = \frac{G'}{A} - \frac{3fm_1\left(C-A\right)}{8\sigma^3 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I}{\partial G'}\right],
\end{aligned}
\tag{2.7.22}
$$

2.7.2 Төрт айнымалысы бар ішкі жүйе. Алғашқы интеграл

(2.7.15), (2.7.16) формулаларды ескере отырып, (2.7.17) жүйе келесі түрді қабылдайды [40]

$$
\begin{aligned}
&\dot{H} = \left(\frac{E(t)}{\tilde{m}(t)}\right)\left[\frac{\partial I}{\partial h}\right], \qquad \dot{h} = -\left(\frac{E(t)}{\tilde{m}(t)}\right)\left[\frac{\partial I}{\partial H}\right],\\
&\dot{H}' = E(t)\left[\frac{\partial I}{\partial h'}\right], \qquad \dot{h}' = -E(t)\left[\frac{\partial I}{\partial H'}\right],
\end{aligned}
\tag{2.7.23}
$$

$$
E(t) = (C-A)\tilde{E}(t), \qquad \tilde{E}(t) = -\frac{3fm_1}{8\sigma^3 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}, \qquad \tilde{m}(t) = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2},
$$

(2.7.23) жүйеден мына бірінші интегралды табамыз [47,48]

$$
\begin{aligned}
&\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial H}\dot{H}+\frac{\partial I}{\partial h}\dot{h}+\frac{\partial I}{\partial H'}\dot{H}'+\frac{\partial I}{\partial h'}\dot{h}'=\\
&=\frac{\partial I}{\partial H}\left(\left(\frac{E(t)}{\tilde{m}(t)}\right)\left[\frac{\partial I}{\partial h}\right]\right)+\frac{\partial I}{\partial h}\left(-\left(\frac{E(t)}{\tilde{m}(t)}\right)\left[\frac{\partial I}{\partial H}\right]\right)+\\
&+\frac{\partial I}{\partial H'}\left(E(t)\left[\frac{\partial I}{\partial h'}\right]\right)+\frac{\partial I}{\partial h'}\left(-E(t)\left[\frac{\partial I}{\partial H'}\right]\right)=\\
&=\left(\frac{E(t)}{\tilde{m}(t)}\right)\left\{\frac{\partial I}{\partial H}\left[\frac{\partial I}{\partial h}\right]-\frac{\partial I}{\partial h}\left[\frac{\partial I}{\partial H}\right]\right\}+\\
&+\left(E(t)\right)\left\{\frac{\partial I}{\partial H'}\left[\frac{\partial I}{\partial h'}\right]-\frac{\partial I}{\partial h'}\left[\frac{\partial I}{\partial H'}\right]\right\}=0,
\end{aligned}
\tag{2.7.24}
$$

Сондықтанда

$$
I=I\left(H,h,H',h'\right)=I_0=const, \tag{2.7.25}
$$

$$
\begin{aligned}
I=&\frac{3}{2}-\frac{L'^2}{2G'^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right)\left(\frac{H^2}{G^2}+\frac{H'^2}{G'^2}-\frac{3H^2H'^2}{G^2G'^2}\right)+\\
&+\frac{1}{2}\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{L'^2}{G'^2}\right)\cos\left[2\left(h-h'\right)\right]-\\
&-\frac{1}{2}\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\left(\frac{2L'^2}{G'^2}+\frac{H'^2}{G'^2}-\frac{3L'^2H'^2}{G'^4}\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right]-\\
&-\frac{2HH'}{GG'}\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{H'^2}{G'^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right)\cos\left[h+h'\right].
\end{aligned}
\tag{2.7.26}
$$

2.8 Ғасырлық ұйытқу теңдеулерін аналитикалық талдау және қорытындылау

Алынған қозғалыс теңдеулерді мен интегралдарды квазиконустық қима бойымен апериодтық қозғалыс элементтерінде және Андуайе элементтерінде талдау ыңғайлы. Келесі белгілі қатынастарды (2.3.5), (2.3.11) қолданамыз [49]

$$
\begin{aligned}
&L=\sqrt{\mu}\sqrt{a}, \qquad G=L\sqrt{\left(1-e^2\right)}, \qquad H=G\cos i,\\
&l=M, \qquad g=\omega, \qquad h=\Omega,\\
&H'=G'\cos I', \qquad L'=G'\cos J',
\end{aligned}
\tag{2.8.1}
$$

(2.7.18) формуладан шығатыны

$$
\begin{gathered}
L_{век} = L_{0век} = \sqrt{\mu}\sqrt{a_{век}} = const, \\
G_{век} = G_{0век} = L_{0век}\sqrt{\left(1-e_{век}^2\right)} = const, \\
L'_{век} = L'_{0век} = const, \qquad G'_{век} = G'_{0век} = const,
\end{gathered} \tag{2.8.2}
$$

(2.8.1) формуланы ескере отырып, (2.7.23) теңдеуді және (2.7.25) бірінші интегралды қайта жазамыз

$$
G_0\frac{d(\cos i)}{dt} = (C-A)\frac{\tilde{E}(t)}{\tilde{m}(t)}\left[\frac{\partial I}{\partial \Omega}\right], \qquad \frac{d\Omega}{dt} = -(C-A)\frac{\tilde{E}(t)}{G_0\tilde{m}(t)}\left[\frac{\partial I}{\partial(\cos i)}\right], \tag{2.8.3}
$$

$$
G'_0\frac{d(\cos I')}{dt} = (C-A)\tilde{E}(t)\left[\frac{\partial I}{\partial h'}\right], \qquad \frac{dh'}{dt} = -\frac{(C-A)\tilde{E}(t)}{G'_0}\left[\frac{\partial I}{\partial(\cos I')}\right], \tag{2.8.4}
$$

$$
I = I(i,\Omega,I',h') = I_0 = const, \tag{2.8.5}
$$

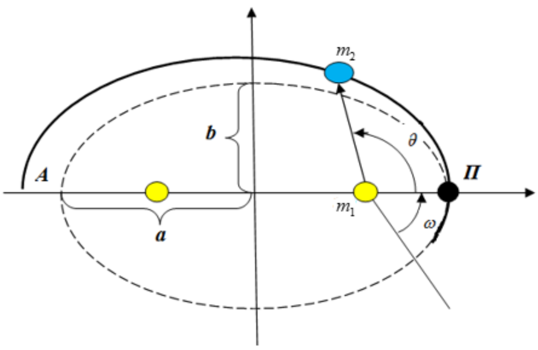
(2.8.2)-(2.8.4) қатынастардан маңызды сапалық қорытындылар жасауға болады.

Ілгерілемелі қозғалыс

Геометриялық интерпретация

1. Өстік симметриялы дененің инерция центрі орбитасының үлкен жарты өс және эксцентриситет аналогтары тұрақты болып қалады [49]

$$
a_{век} = \frac{L_{век}^2}{\mu} = \frac{L_{0век}^2}{\mu} = const, \qquad 1-e_{век}^2 = \frac{G_{век}^2}{L_{век}^2} = \frac{G_{0век}^2}{L_{0век}^2} = const, \tag{2.8.6}
$$

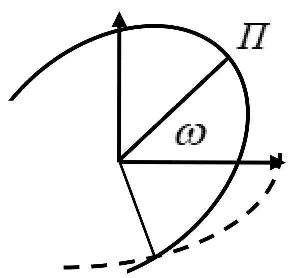


2.5а-сурет. Орбитаның үлкен жарты өс және эксцентриситет аналогтары

Үлкен жарты өстің аналогы мен эксцентриситет аналогы орбиталық жазықтықтағы орбитаның өлшемдерін анықтайды.

2. Өстік симметриялы дененің инерция центрі орбитасының перицентр аргументінің аналогы айнымалы және мына теңдеумен анықталады

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3b\sigma^2 GL^2}{2\mu^3} + (C - A)\frac{\tilde{E}(t)}{\tilde{m}(t)}\left[4 - 3I + e\frac{\partial I}{\partial e}\right], \qquad (2.8.7)$$

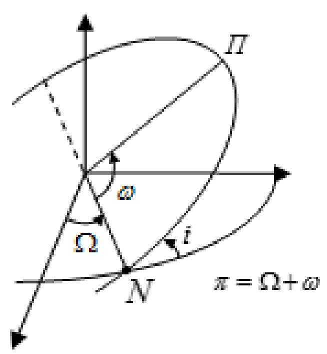


2.7-сурет. Перицентр аргументінің аналогы

Перицентр аргументінің аналогы квазиэллипстік орбитаның бағдарын анықтайды.

3. Өстік симметриялы дененің инерция центрі орбиталық жазықтықтарының жарқырау түйін бойлығы мен көлбеулік бұрышының аналогтары айнымалы және мына теңдеулермен анықталады

$$G_0\frac{d(\cos i)}{dt} = (C - A)\frac{\tilde{E}(t)}{\tilde{m}(t)}\left[\frac{\partial I}{\partial \Omega}\right], \quad \frac{d\Omega}{dt} = -(C - A)\frac{\tilde{E}(t)}{G_0\tilde{m}(t)}\left[\frac{\partial I}{\partial(\cos i)}\right], \qquad (2.8.8)$$



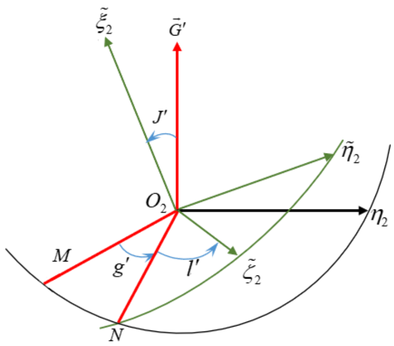
2.8-сурет. Жарқырау түйін бойлығы мен көлбеулік бұрышының аналогтары

Жарқырау түйін бойлығы мен орбиталық көлбеулік бұрышының аналогтары орбиталық жазықтықты анықтайды.

4. (2.8.2)-теңдеуден көрініп тұрғандай өстік симметриялы дененің айналмалы қозғалысының кинетикалық момент векторының модулі және

$$G'_{век} = G'_{0век} = const, \tag{2.8.9}$$

J' бұрышы – кинетикалық момент векторы мен өстік симметриялы дененің симметрия өсі арасындағы бұрыш тұрақты мәндерді сақтайды [49]



$$\cos J' = \frac{L'_{век}}{G'_{век}} = \frac{L'_{0век}}{G'_{0век}} = const. \tag{2.8.10}$$

2.9-сурет. $\vec{G}'$ кинетикалық момент векторы және J' бұрышы

5. I' бұрышы – $G'_{век} = G'_{0век} = const$ кинетикалық момент векторы мен абсолютты координатаның $O_2\xi_2$ өсі арасындағы бұрыш айнымалы және мына теңдеумен анықталады

$$G'_0 \frac{d(\cos I')}{dt} = (C - A)\tilde{E}(t)\left[\frac{\partial I}{\partial h'}\right], \tag{2.8.11}$$

(2.5.3) теңдеуге сәйкес ұйытқымаған айналмалы қозғалыста I' *бұрышы тұрақты болады*

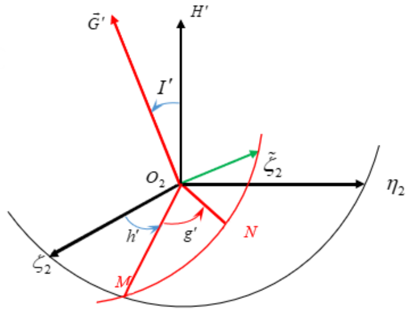
$$\cos I' = \frac{H'_{нв}}{G'_{нв}} = \frac{H'_{0нв}}{G'_{0нв}} = const, \tag{2.8.12}$$

6. O_2M түйіндер сызығының бойлығы $O_2\zeta_2\eta_2$ қозғалмайтын координаттар жүйесінің негізгі жазықтығымен және $G'_{век} = G'_{0век} = const$ кинетикалық момент векторына перпендикуляр O_2MN жазықтықпен қиылысу сызығы айнымалы және мына теңдеумен анықталады

$$\frac{dh'}{dt} = -\frac{(C-A)\tilde{E}(t)}{G'_0}\left[\frac{\partial I}{\partial(\cos I')}\right], \qquad (2.8.13)$$

(2.5.4) теңдеуге сәйкес ұйытқымаған айналмалы қозғалыста h' *бұрышы тұрақты болады*

$$h' = h'_0 = const, \qquad (2.8.14)$$



2.10-сурет. I' бұрышы және h' бұрышы

Механикалық интерпретация

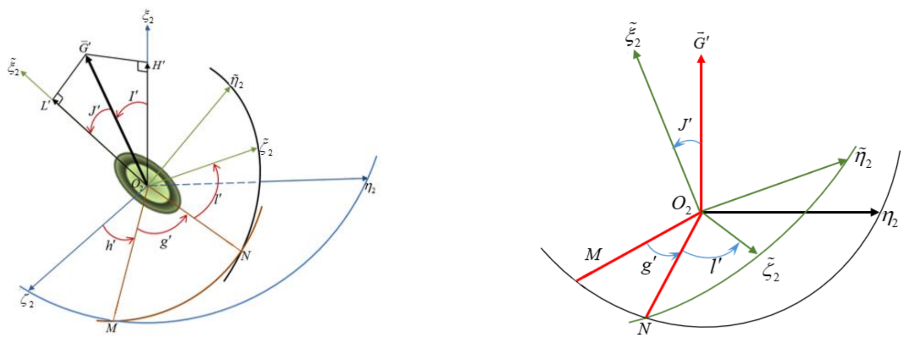
1. Массасы және өлшемі айнымалы өстік симметриялы дене J' тұрақты бұрыштық қашықтықта

$$\cos J' = \frac{L'_{век}}{G'_{век}} = \frac{L'_{0век}}{G'_{0век}} = const, \qquad (2.8.10a)$$

$\dot{g}'$ **айнымалы бұрыштық** жылдамдығымен

$$\frac{dg'}{dt} = \frac{G'}{A} - \frac{(C-A)\tilde{E}(t)}{G'_0}\left[\frac{\partial I}{\partial G'}\right] \qquad (2.8.15)$$

$\vec{G}'$ кинетикалық момент векторының төңірегінде прецессия жасайды



2.11-сурет.

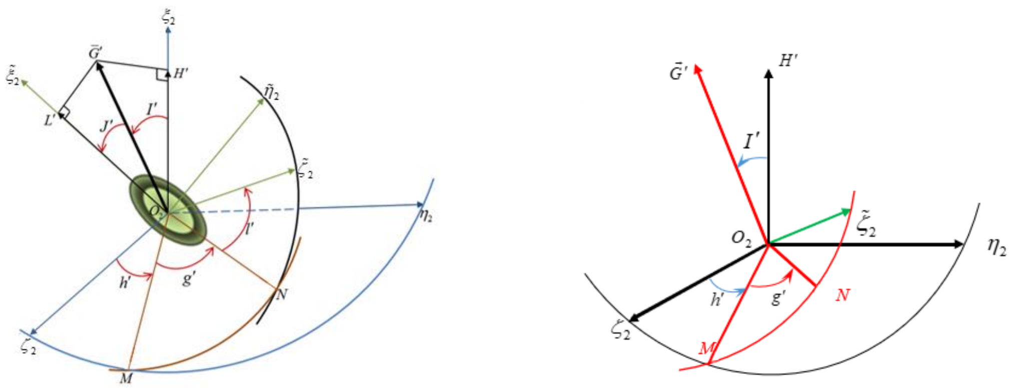
2. Ал $\vec{G}'$ кинетикалық момент векторының өзі I' айнымалы бұрыштық қашықтықта

$$G_0' \frac{d(\cos I')}{dt} = (C - A)\tilde{E}(t)\left[\frac{\partial I}{\partial h'}\right],$$

$\dot{h}'$ **айналмалы бұрыштық** жылдамдығымен

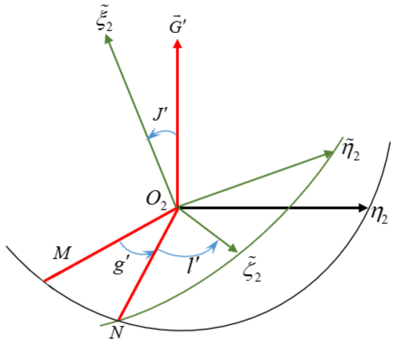
$$\frac{dh'}{dt} = -\frac{(C - A)\tilde{E}(t)}{G_0'}\left[\frac{\partial I}{\partial(\cos I')}\right]$$

абсолютты координатаның $O_2\xi_2$ өсінің төңірегінде прецессия жасайды



2.12-сурет.

3. l' симметрия өсінің меншікті айналу бұрышы – O_2N түйіндер сызығы мен қозғалмалы координаттар жүйесінің $O_2\tilde{\zeta}_2$ өсі арасындағы бұрыш айнымалы және мына теңдеумен анықталады



$$\frac{dl'}{dt} = \frac{A - C}{AC} L' + \frac{(C - A)\tilde{E}(t)}{G_0'}\left[\frac{\partial I}{\partial L'}\right] \qquad (2.8.16)$$

2.13-сурет. l' бұрышы

(2.5.4) теңдеуге сәйкес ұйытқымаған айналмалы қозғалыста l' бұрышы айнымалы болады

$$\frac{dl'}{dt} = \frac{A - C}{AC} L'. \tag{2.8.17}$$

Біздің қарастырған мәселенің физикалық қойылымы бойынша жоғарыда көрсетілген геометриялық және механикалық интерпретациялар қарастырылған мәселе үшін кез-келген бастапқы мәндері және массасы мен өлшемдерді сипаттайтын кез-келген функциялар үшін жалпы қасиеттер болып табылады.

Жоғарыда келтірілген жұмыстардың дербес жағдайы массасы және өлшемдері тұрақты өстік симметриялы дененің айналмалы қозғалыс теңдеулері Белецкий-Черноусько элементтерінде Белецкийдің [4] жұмысында алынған. Белецкий-Черноусько және Андуайе элементтерінің арасындағы байланыс формулалары келесідей болады [4]

$$I' = \rho, \quad \vartheta = \theta, \quad l' = \varphi, \quad g' = \psi - \frac{\pi}{2}, \quad h' = \sigma + \frac{\pi}{2}.$$

Ю.В. Баркин, С.М. Эль-Шабури, Д.З. Коенов жұмыстарында классикалық интегралдарды пайдаланып, мәселенің әр түрлі жағдайлары зерттелініп, жақсы нәтижелер алынған.

Біздің мәселенің дербес жағдайы массасы және өлшемдері тұрақты болған жағдайда біздің нәтижелер сол жұмыстардың нәтижелерімен сәйкес келеді.

3 ҒАСЫРЛЫҚ ҰЙЫТҚУ ТЕҢДЕУЛЕРІН САНДЫҚ ТӘСІЛМЕН ШЕШУ ЖӘНЕ ГРАФИКТЕРІН АЛУ

3.1 Өлшемсіз айнымалылардағы қозғалыс теңдеулері

(2.7.13)-(2.7.14) формулаларындағы $W_{век}, F_{век}$ ғасырлық ұйытқушы функцияларынан сәйкесінше Делоне-Андуайе элементтер аналогтары арқылы дербес туынды алып, өстік симметриялы дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын зерттейтін ғасырлық ұйытқыған теңдеулерін алдық. Массаның уақытқа тәуелділігінен алынған дифференциалдық теңдеулер жүйесін аналитикалық шешу қиын. Дегенмен, массаның өзгеру заңдылығының қандай да бір нақты моделін таңдау арқылы оның сандық шешімін алуға және жүйенің динамикасын зерттеуге болады [50-58].

Есептеулер жүргізу ыңғайлы болу үшін келесі өлшемсіз айнымалыларды енгіземіз. Мысалы, P_1, P_2 денелер үшін сәйкесінше m_{10}, m_{20} бастапқы массаларды аламыз, арақашықтықты өлшеу бірлігі ретінде a үлкен жарты өсті аламыз. Өлшемсіз m^* масса, a^* арақашықтық, t^* уақыт келесідей болады

$$m_i^* = \frac{m_i}{m_{00}}, \quad a^* = \frac{r}{a_0}, \quad t^* = \tau = \frac{t}{T_0},$$
$$T = \frac{2\pi}{n_0}, \quad n_0 = \frac{\sqrt{\mu_0}}{a_0^{3/2}}, \quad \mu_0 = f\left(m_{10} + m_{20}\right), \quad i = 1, 2, \tag{3.1.1}$$

Өлшемсіз массалар мен инерция моменттері келесі түрде болады

$$m_1(t) = m_{10} m_1^*\left(t^*\right), \qquad m_2(t) = m_{10} m_2^*\left(t^*\right), \tag{3.1.2}$$

$$m_1^*\left(t_0^*\right) = 1, \qquad m_2^*\left(t_0^*\right) = \frac{m_{20}}{m_{10}}, \tag{3.1.3}$$

$$C^*\left(t^*\right) = \frac{C_0}{m_{20} a^2}, \qquad A^*\left(t^*\right) = \frac{A_0}{m_{20} a^2}, \tag{3.1.4}$$

Делоне-Андуайе элементтер аналогтары сәйкесінше өлшемсіз шамалармен ауыстырылады

$$L^* = \frac{L}{\sqrt{f\left(m_{10} + m_{20}\right) a}}, \quad G^* = \frac{G}{\sqrt{f\left(m_{10} + m_{20}\right) a}}, \quad H^* = \frac{H}{\sqrt{f\left(m_{10} + m_{20}\right) a}},$$
$$L'^* = \frac{L'}{m_{10} a^2 \omega_0}, \qquad G'^* = \frac{G'}{m_{10} a^2 \omega_0}, \qquad H'^* = \frac{H'}{m_{10} a^2 \omega_0}, \tag{3.1.5}$$

және

$$\sigma = \frac{m_1^*\left(t_0^*\right) + m_2^*\left(t_0^*\right)}{m_1^*\left(t^*\right) + m_2^*\left(t^*\right)}, \tag{3.1.6}$$

Массалардың өзгеру заңдылығын Эддингтон-Джинс заңымен анықталады [53]

$$m_i^*\left(t^*\right) = \left(m_{i0}^{*\,1-n_i} - \alpha_i\left(1-n_i\right)\left(t^* - t_0^*\right)\right)^{\frac{1}{1-n_i}}, \qquad i = 1,2, \tag{3.1.7}$$

мұндағы

$$n_1 = n_2 = 2, \qquad \alpha_1 = \frac{1}{300000}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{100000}.$$

Центрлік өрістегі бейстационар өстік симметриялы дененің Делоне-Андуайе элементтер аналогтарындағы (2.7.15), (2.7.16)-шы ғасырлық ұйытқу теңдеулері ашық түрде келесідей болады [46,47]

$$\begin{aligned}
\dot{H}_{век} &= \frac{\partial W_{век}}{\partial h_{век}} = -\frac{3f\left(m_1+m_2\right)\left(C-A\right)}{8\sigma^3 a^3 m_2\left(1-e^2\right)^{3/2}}\frac{1}{G^2 G'^4}\Big(-G'^2\left(G^2-H^2\right)\cdot \\
&\cdot\left(G'^2-L'^2\right)\sin\left[2\left(h-h'\right)\right] + 2\Bigg(GH\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}\,H'\Big(-2\sqrt{G'^2-H'^2}\,L'^2 + \\
&+\sqrt{G'^2-L'^2}\sqrt{\left(G'^2-H'^2\right)\left(G'^2-L'^2\right)}\Big) + \left(G^2-H^2\right)\Big(-3H'^2L'^2 + \\
&+G'^2\left(H'^2+2L'^2\right)\Big)\cos\left[h+h'\right]\Bigg)\sin\left[h+h'\right]\Big),
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

$$\begin{aligned}
\dot{h}_{век} &= -\frac{\partial W_{век}}{\partial H_{век}} = \frac{3f\left(m_1+m_2\right)\left(C-A\right)}{8\sigma^3 a^3 m_2\left(1-e^2\right)^{3/2}}\Big(-GH\,G'^2\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}\sqrt{G'^2-L'^2}\,\cdot \\
&\cdot\cos\left[2\left(h-h'\right)\right] - 2\left(G^2-2H^2\right)H'\Big(-2\sqrt{G'^2-H'^2}\,L'^2 + \sqrt{G'^2-L'^2}\,\cdot \\
&\cdot\sqrt{\left(G'^2-H'^2\right)\left(G'^2-L'^2\right)}\Big)\cos\left[h+h'\right] + GH\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}\Big(\left(-G'^2+3H'^2\right)\cdot \\
&\cdot\left(G'^2-3L'^2\right) + \left(-3H'^2L'^2 + G'^2\left(H'^2+2L'^2\right)\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right]\Big)\Big),
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

$$\dot{H}'_{век} = -\frac{\partial F_{век}}{\partial h'_{век}} = -\frac{3fm_1\left(C-A\right)}{8\sigma^3 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\frac{1}{G^2G'^4}\Big(G'^2\left(G^2-H^2\right)\left(G'^2-L'^2\right)\cdot$$

$$\cdot\sin\left[2\left(h-h'\right)\right]+2\Bigg(GH\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}H'\left(-2\sqrt{G'^2-H'^2}L'^2+\sqrt{G'^2-L'^2}\cdot\right. \qquad (3.1.10)$$

$$\left.\cdot\sqrt{\left(G'^2-H'^2\right)\left(G'^2-L'^2\right)}+\left(G^2-H^2\right)\left(-3H'^2L'^2+G'^2\left(H'^2+2L'^2\right)\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\cos\left[h+h'\right]\Big)\sin\left[h+h'\right]\Bigg),$$

$$\dot{h}'_{век} = \frac{\partial F_{век}}{\partial H'_{век}} = -\frac{3fm_1\left(C-A\right)}{16\sigma^3 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\frac{1}{G^2G'^4}\Bigg(\frac{1}{\left(G'^2-H'^2\right)^{3/2}}4GH\cdot$$

$$\cdot\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}\left(G'^2-2H'^2\right)\left(-2G'^2L'^2+2H'^2L'^2+\sqrt{G'^2-H'^2}\sqrt{G'^2-L'^2}\right. \qquad (3.1.11)$$

$$\left.\cdot\sqrt{\left(G'^2-H'^2\right)\left(G'^2-L'^2\right)}\right)\cos\left[h+h'\right]+2H'\left(G'^2-3L'^2\right)$$

$$\left(G^2-3H^2+\left(G^2-H^2\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right]\right)\Bigg),$$

$$\dot{l}_{век} = -\frac{\partial W_{век}}{\partial L_{век}} = \frac{\mu^2}{L^3\sigma^2}+\frac{b\sigma^2 L}{2\mu^2}\left(-3G^2+10L^2\right)-$$

$$-\frac{3f\left(C-A\right)}{16m_2\sigma^4 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}G^5G'^4L^4}\Big(\left(G^2-3H^2\right)\left(G'^2-3H'^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(G^2-3L'^2\right)+3G'^4\left(G^2-H^2\right)\left(G'^2-L'^2\right)\cos\left[2\left(h-h'\right)\right]- \qquad (3.1.12)$$

$$-12HH'\sqrt{G^2-H^2}\left(-2\sqrt{G'^2-H'^2}L'^2+\sqrt{G'^2-L'^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sqrt{\left(G'^2-H'^2\right)\left(G'^2-L'^2\right)}\right)\cos\left[h+h'\right]-3\left(G^2-H^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-3H'^2L'^2+G'^2\left(H'^2+2L'^2\right)\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right]\Big),$$

$$\dot{g}_{век} = -\frac{\partial W_{век}}{\partial G_{век}} = -\frac{3b\sigma^2 GL^2}{2\mu^2} - \frac{3f\mu^4(C-A)}{16m_2\sigma^4 a^3\left(1-e^2\right)^{3/2} G^6 G'^4 L^3} \cdot$$
$$\cdot\Bigg(\left(G^2-5H^2\right)\left(G'^2-3H'^2\right)\left(G'^2-3L'^2\right)+G'^2\Big(\left(3G^2-5H^2\right)\cdot$$
$$\cdot\left(G'^2-L'^2\right)\cos\left[2\left(h-h'\right)\right]\Big)+\Big(4HH'\left(-4G^2+5H^2\right)\cos\left[h+h'\right]\cdot \tag{3.1.13}$$
$$\frac{\left(-2\sqrt{G'^2-H'^2}L'^2+\sqrt{G'^2-L'^2}\sqrt{\left(G'^2-H'^2\right)\left(G'^2-L'^2\right)}\right)\Big)}{\sqrt{G^2-H^2}} -$$
$$-\left(3G^2-5H^2\right)\left(-3H'^2L'^2+G'^2\left(H'^2+2L'^2\right)\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right]\Bigg),$$

$$\dot{l}'_{век} = \frac{\partial F_{век}}{\partial L'_{век}} = \frac{C-A}{CA}L' + \frac{3fm_1(C-A)\mu^4 L'}{8\sigma^3\left(m_1+m_2\right)a^3\left(1-e^2\right)^{3/2} G^5 G'^4 L^3} \cdot$$
$$\cdot\Bigg(\left(G^2-3H^2\right)\left(G'^2-3H'^2\right)+G'^2\left(G^2-H^2\right)\cos\left[2\left(h-h'\right)\right]+ \tag{3.1.14}$$
$$+\frac{4HH'\sqrt{G^2-H^2}\left(3\sqrt{\left(G'^2-H'^2\right)\left(G'^2-L'^2\right)}\cos\left[h+h'\right]\right.}{\sqrt{G'^2-L'^2}}+$$
$$+\left(G^2-H^2\right)\left(2G'^2-3H'^2\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right],$$

$$\dot{g}' = \frac{\partial F_{век}}{\partial G'_{век}} = \frac{G'}{A} - \frac{3fm_1\mu^4(C-A)}{8\sigma^3\left(m_1+m_2\right)a^3\left(1-e^2\right)^{3/2} G^5 G'^3 L^3}$$
$$\Bigg(\left(G^2-3H^2\right)\left(-6H'^2L'^2+G'^2\left(H'^2+L'^2\right)\right)+G'^2L'^2\left(G^2-H^2\right)\cos\left[2\left(h-h'\right)\right]+ \tag{3.1.15}$$
$$+2HH'\sqrt{\frac{G^2-H^2}{G'^2-H'^2}}\left(G'^4+12H'^2L'^2-2G'^2H'^2-9G'^2L'^2\right)\cos\left[h+h'\right]+$$
$$+\left(G^2-H^2\right)\left(-6H'^2L'^2+G'^2\left(H'^2+L'^2\right)\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right].$$

Нәтижесінде (3.1.8)-(3.1.15) ғасырлық ұйытқу теңдеулерін өлшемсіз айнымалыларда жазатын болсақ [47]

$$\frac{dH^*}{dt^*} = -\frac{3\left(C^*\chi_1^2\left(t^*\right)-A^*\chi_2^2\left(t^*\right)\right)}{8\sigma^4\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I^*}{\partial h^*}\right], \tag{3.1.16}$$

$$\frac{dh^*}{dt^*}=\frac{3\left(C^*\chi_1^2\left(t^*\right)-A^*\chi_2^2\left(t^*\right)\right)}{8\sigma^4\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I^*}{\partial H^*}\right], \tag{3.1.17}$$

$$\frac{dH'^*}{dt^*}=\frac{3m_{10}\left(C^*\chi_1^2\left(t^*\right)-A^*\chi_2^2\left(t^*\right)\right)m_1^*\left(t^*\right)m_2^*\left(t^*\right)\chi^2\left(t^*\right)}{8\left(m_{10}+m_{20}\right)\sigma^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I^*}{\partial h'^*}\right], \tag{3.1.18}$$

$$\frac{dh'^*}{dt^*}=-\frac{3m_{10}\left(C^*\chi_1^2\left(t^*\right)-A^*\chi_2^2\left(t^*\right)\right)m_1^*\left(t^*\right)m_2^*\left(t^*\right)}{8\left(m_{10}+m_{20}\right)\sigma^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I^*}{\partial H'^*}\right], \tag{3.1.19}$$

$$\frac{dl^*}{dt^*}=\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2}b\left(7+3e^2\right)+\frac{3\left(C^*\chi_1^2\left(t^*\right)-A^*\chi_2^2\left(t^*\right)\right)}{8\sigma^4\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[4-3I^*\right], \tag{3.2.20}$$

$$\frac{dg^*}{dt^*}=-\frac{3}{2}b\sqrt{1-e^2}+\frac{3\left(C^*\chi_1^2\left(t^*\right)-A^*\chi_2^2\left(t^*\right)\right)}{8\sigma^4\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[4-3I^*+G^*\frac{\partial I^*}{\partial G^*}\right], \tag{3.1.21}$$

$$\begin{gathered}\frac{dl'^*}{dt^*}=-\frac{\left(C^*\chi_1^2\left(t^*\right)-A^*\chi_2^2\left(t^*\right)\right)}{C^*A^*\chi_1^2\left(t^*\right)\chi_2^2\left(t^*\right)}\frac{L'}{m_2^*\left(t^*\right)}+\\+\frac{3m_{10}\left(C^*\chi_1^2\left(t^*\right)-A^*\chi_2^2\left(t^*\right)\right)m_1^*\left(t^*\right)m_2^*\left(t^*\right)}{8\left(m_{10}+m_{20}\right)\sigma^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I^*}{\partial L'^*}\right],\end{gathered} \tag{3.1.22}$$

$$\begin{gathered}\frac{dg'^*}{dt^*}=\frac{G'}{A^*m_2^*\left(t^*\right)\chi_2^2\left(t^*\right)}-\\-\frac{3m_{10}\left(C^*\chi_1^2\left(t^*\right)-A^*\chi_2^2\left(t^*\right)\right)m_1^*\left(t^*\right)m_2^*\left(t^*\right)}{8\left(m_{10}+m_{20}\right)\sigma^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left[\frac{\partial I^*}{\partial G'^*}\right],\end{gathered} \tag{3.1.23}$$

Барлық «*» таңбалы айнымалылар өлшемсіз және өлшемсіз t^* уақытқа тәуелді. Әрі қарай шамаларды «*» таңбасынсыз жазамыз. (3.1.16)-(3.1.23) өлшемсіз теңдеулер ашық түрде келесідей болады [47]

$$\frac{dH_{век}}{dt}=-\frac{3\left(C\chi_1^2(t)-A\chi_2^2(t)\right)}{8\sigma^4\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left(-\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{L'^2}{G'^2}\right)\sin\left[2\left(h-h'\right)\right]+\right.$$
$$+\frac{2HH'}{GG'}\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}\sqrt{1-\frac{H'^2}{G'^2}}\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right)\sin\left[h+h'\right]+ \tag{3.1.24}$$
$$\left.+\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\left(\frac{2L'^2}{G'^2}+\frac{H'^2}{G'^2}-\frac{3L'^2H'^2}{G'^4}\right)\sin\left[2\left(h+h'\right)\right]\right),$$

$$\frac{dh_{век}}{dt}=-\frac{3\left(C\chi_1^2(t)-A\chi_2^2(t)\right)}{8\sigma^4\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left(-\frac{H^2}{G^2}\left(1-\frac{L'^2}{G'^2}\right)\cos\left[2\left(h-h'\right)\right]-\right.$$
$$-\frac{2H'}{G'^2}\left(1-\frac{2H^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right)\sqrt{\frac{G'^2-H'^2}{G^2-H^2}}\cos\left[h+h'\right]-\frac{H}{G^2}\left(1-\frac{3H'^2}{G'^2}\right)\cdot \tag{3.1.25}$$
$$\left.\cdot\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right)+\frac{H}{G^2}\left(\frac{2L'^2}{G'^2}+\frac{H'^2}{G'^2}-\frac{3L'^2H'^2}{G'^4}\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right]\right),$$

$$\frac{dH'_{век}}{dt}=\frac{3m_{10}m_1(t)m_2(t)\left(C\chi_1^2(t)-A\chi_2^2(t)\right)}{8\sigma^3\left(m_{10}+m_{20}\right)\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left(\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{L'^2}{G'^2}\right)\cdot\right.$$
$$\cdot\sin\left[2\left(h-h'\right)\right]+\frac{2HH'}{GG'}\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}\sqrt{1-\frac{H'^2}{G'^2}}\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right)\sin\left[h+h'\right]+ \tag{3.1.26}$$
$$\left.+\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\left(\frac{2L'^2}{G'^2}+\frac{H'^2}{G'^2}-\frac{3L'^2H'^2}{G'^4}\right)\sin\left[2\left(h+h'\right)\right]\right),$$

$$\frac{dh'_{век}}{dt}=\frac{3m_{10}m_1(t)m_2(t)\left(C\chi_1^2(t)-A\chi_2^2(t)\right)}{8\sigma^3\left(m_{10}+m_{20}\right)\left(1-e^2\right)^{3/2}}\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{2H}{G^2}\sqrt{\frac{G'^2-H'^2}{G^2-H^2}}\left(1-\frac{2H'^2}{G'^2}\right)\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right)\cos\left[h+h'\right]-\right. \tag{3.1.27}$$
$$\left.-\frac{H'}{G'^2}\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right)\left(1-\frac{3H^2}{G^2}+\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right]\right)\right),$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dl_{век}}{dt} = {} & \frac{1}{\sigma^2} + \frac{\ddot{\sigma}\sigma}{2}\left(7+3e^2\right) - \frac{3\left(C\chi_1^2(t) - A\chi_2^2(t)\right)}{16\sigma^4\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left(\left(1-\frac{3H^2}{G^2}\right)\cdot\right. \\
& \cdot\left(1-\frac{3H'^2}{G'^2}\right)\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right) + 3\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{L'^2}{G'^2}\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right] - \\
& - \frac{12HH'}{GG'}\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}\sqrt{1-\frac{H'^2}{G'^2}}\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right)\cos\left[h+h'\right] - \\
& \left. - 3\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\left(\frac{2L'^2}{G'^2}+\frac{H'^2}{G'^2}-\frac{3L'^2H'^2}{G'^4}\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right]\right),
\end{aligned}
\tag{3.1.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dg_{век}}{dt} = {} & -\frac{3\ddot{\sigma}\sigma}{2}\left(1-e^2\right)^{1/2} - \frac{3\left(C\chi_1^2(t) - A\chi_2^2(t)\right)}{16\sigma^4\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left(\left(3-\frac{5H^2}{G^2}\right)\cdot\right. \\
& \cdot\left(1-\frac{L'^2}{G'^2}\right)\cos\left[2\left(h-h'\right)\right] - \frac{4HH'}{G'^2}\left(4-\frac{5H^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right)\cdot \\
& \cdot\sqrt{\frac{G'^2-H'^2}{G^2-H^2}}\cos\left[h+h'\right] + \left(1-\frac{5H^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{3H'^2}{G'^2}\right)\left(1-\frac{3L'^2}{G'^2}\right) - \\
& \left. -\left(3-\frac{5H^2}{G^2}\right)\left(\frac{2L'^2}{G'^2}+\frac{H'^2}{G'^2}-\frac{3L'^2H'^2}{G'^4}\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right]\right),
\end{aligned}
\tag{3.1.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dl'_{век}}{dt} = {} & -\frac{\left(C\chi_1^2(t) - A\chi_2^2(t)\right)}{CA\chi_1^2(t)\chi_2^2(t)}\frac{L'}{m_2(t)} - \frac{3m_{10}m_1(t)m_2(t)\left(C\chi_1^2(t) - A\chi_2^2(t)\right)}{8\sigma^3\left(m_{10}+m_{20}\right)\left(1-e^2\right)^{3/2}}\cdot \\
& \cdot\frac{L'}{G'^2}\left(\left(1-\frac{3H^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{3H'^2}{G'^2}\right) + \left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\cos\left[2\left(h-h'\right)\right] - \frac{12HH'}{GG'}\cdot\right. \\
& \left. \cdot\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}\sqrt{1-\frac{H'^2}{G'^2}}\cos\left[h+h'\right] - \left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\left(1-\frac{3H'^2}{G'^2}\right)\cos\left[2\left(h+h'\right)\right]\right),
\end{aligned}
\tag{3.1.30}
$$

$$\frac{dg'_{век}}{dt} = \frac{G'}{m_2(t)A\chi^2(t)} - \frac{3m_{10}m_1(t)m_2(t)\left(C\chi_1^2(t) - A\chi_2^2(t)\right)}{8\sigma^3(m_{10}+m_{20})\left(1-e^2\right)^{3/2}G}$$

$$\left(\left(1-\frac{3H^2}{G^2}\right)\left(\frac{L'^2}{G'^2}+\frac{H'^2}{G'^2}-\frac{6L'^2H'^2}{G'^4}\right)+\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\frac{L'^2}{G'^2}\cos\left[2(h-h')\right]+\right.$$

$$\frac{2HH'}{G^2}\sqrt{\frac{G^2-H^2}{G'^2-H'^2}}\left(1-\frac{9L'^2}{G'^2}-\frac{2H'^2}{G'^2}+\frac{12L'^2H'^2}{G'^4}\right)\cos\left[h+h'\right]+ \tag{3.1.31}$$

$$\left.+\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\left(\frac{2L'^2}{G'^2}+\frac{H'^2}{G'^2}-\frac{6L'^2H'^2}{G'^4}\right)\cos\left[2(h+h')\right]\right),$$

Мұнда барлық айнымалылар өлшемсіз.

3.2 Коши есебінің бастапқы шарттары

Физикалық параметрлердің келесі мәндерін пайдаланамыз [59-64]

$$\begin{gathered} m_{10} = m_1(t_0) = 1M_{\odot}, \qquad m_{20} = m_2(t_0) = 955\cdot 10^{-6}M_{\odot}, \\ e = 0,048, \qquad a = 5,2034 а.б., \end{gathered} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{gathered} A_0 = 0,3\left(M_Ю/M_{\odot}\right), \qquad C_0 = 0,254\left(M_Ю/M_{\odot}\right), \\ \chi_1^2(t) = 1+10^{-4}t, \qquad \chi_2^2(t) = 1+10^{-5}t, \end{gathered} \tag{3.2.2}$$

Мұндағы $M_{\odot}$ – Күннің массасы, $M_Ю$ – Юпитердің массасы. Делоне-Андуайе элементтер аналогтарының өлшемсіз бастапқы мәндері келесідей болады [59-66]

$$\begin{gathered} L^* = 1, \qquad G^* = 0,9981, \qquad H^* = 0,9979, \\ l^* = 189,495\frac{\pi}{180}, \qquad g^* = 273,98\frac{\pi}{180}, \qquad h^* = 100,56\frac{\pi}{180}, \end{gathered} \tag{3.2.3}$$

$$\begin{gathered} L'^* = 2,875\cdot 10^{-4}, \qquad G'^* = 2,882\cdot 10^{-4}, \qquad H'^* = 2,839\cdot 10^{-4}, \\ l'^* = 10\frac{\pi}{180}, \qquad g'^* = 273,98\frac{\pi}{180}-\frac{\pi}{2}, \qquad h'^* = 26,727\frac{\pi}{180}+\frac{\pi}{2}, \end{gathered} \tag{3.2.4}$$

Тұрақты масса жағдайында

$$m_1(t)=\frac{m_{10}(t)}{\left(m_{10}^{1-n_1}-\alpha_1(1-n_1)t\right)^{\frac{1}{1-n_1}}}=1,$$

$$m_2(t)=\frac{m_{20}(t)}{\left(m_{20}^{1-n_2}-\alpha_2(1-n_2)t\right)^{\frac{1}{1-n_2}}}=\frac{191}{200000}, \tag{3.2.5}$$

$$\sigma(t)=\frac{m_1(t_0)+m_2(t_0)}{m_1(t)+m_2(t)}=1, \tag{3.2.6}$$

$$b=\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma}=1, \tag{3.2.7}$$

Изотропты айнымалы масса жағдайында

$$m_1(t)=\frac{m_{10}(t)}{\left(m_{10}^{1-n_1}-\alpha_1(1-n_1)t\right)^{\frac{1}{1-n_1}}}=\frac{1}{1+\frac{t}{300000}},$$

$$m_2(t)=\frac{m_{20}(t)}{\left(m_{20}^{1-n_2}-\alpha_2(1-n_2)t\right)^{\frac{1}{1-n_2}}}=\frac{1}{\frac{200000}{191}+\frac{t}{100000}}, \tag{3.2.8}$$

$$\sigma(t)=\frac{m_1(t_0)+m_2(t_0)}{m_1(t)+m_2(t)}=$$

$$=\frac{200191}{200000\left(\frac{1}{1+\frac{t}{300000}}+\frac{1}{\frac{200000}{191}+\frac{t}{100000}}\right)}, \tag{3.2.9}$$

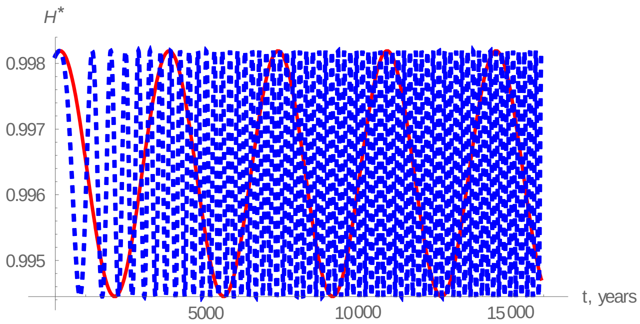
$$b(t)=\frac{\ddot{\sigma}(t)}{\sigma(t)}=-\frac{9{,}1\cdot10^{23}(300000+t)\left(20\cdot10^{9}+191t\right)}{5\cdot10^{12}\left(15\cdot10^{9}+191t\right)^{4}}. \tag{3.2.10}$$

3.3 Ғасырлық ұйытқу теңдеулерінің графиктері, массалары тұрақты және айнымалы жағдайларды салыстыру

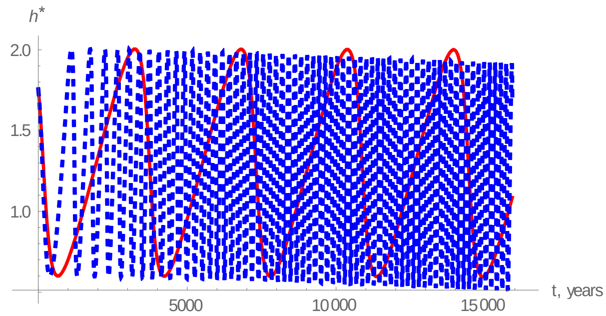
Wolfram Mathematica компьютерлік алгебра жүйесін пайдалана отырып, (3.2.1)-(3.2.4) бастапқы шарттарда (3.1.8)-(3.1.15) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерін алуға болады. Айнымалы массалардың әсерін анықтау және салыстыру үшін есепті масса тұрақты жағдайында да қарастырамыз.

(3.1)-(3.12)-суреттерде 15000 жыл уақыт аралығындағы центрлік дене Күннің өрісіндегі өстік симметриялы дене Юпитердің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын сипаттайтын Делоне-Айндуайе элементтер аналогтарының сандық тәсілмен шешілген ғасырлық ұйытқу теңдеулерінің графиктері көрсетілген.

Есептеулер денелердің массасы тұрақты жағдайда және әр түрлі қарқында изотропты өзгеретін айнымалы масса жағдайында жүргізілді [46]

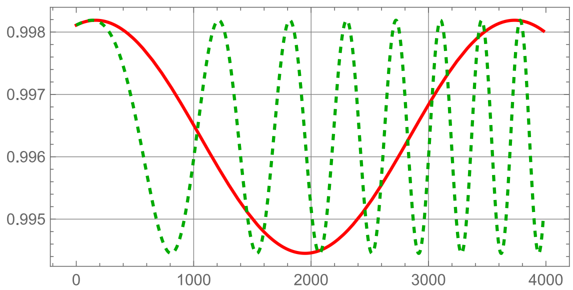


3.1-сурет. H^* элемент аналогының эволюциясы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса

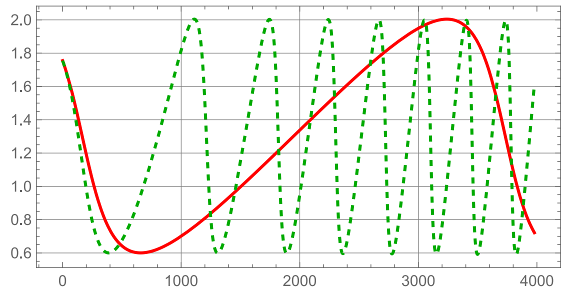


3.2-сурет. h^* элемент аналогының эволюциясы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса

(3.1), (3.2)-суреттерді көру қиын болғандықтан, H, h элементтер аналогтары графиктерінің қысқа уақыт аралығындағы бөлігі көрсетілген, онда элементтердің эволюциясының өзгерісі (3.3), (3.4)-суреттерге сәйкес анық көрінетін болады.

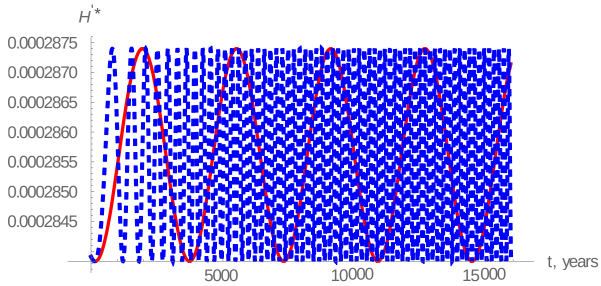


3.3-сурет. H^* элемент аналогы, 4000 жыл уақыт аралығы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса

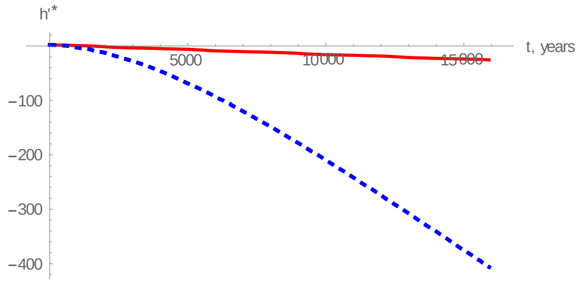


3.4-сурет. h^* элемент аналогы 4000 жыл уақыт аралығы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса

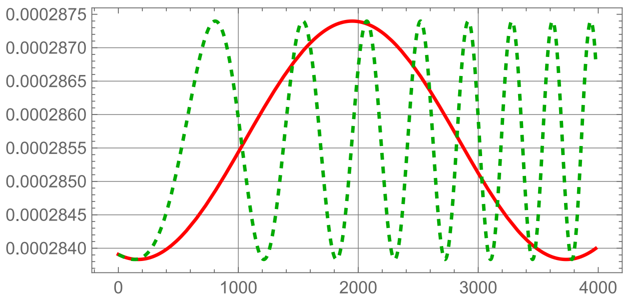
Есептеулер тұрақты масса жағдайында (уақыт аралығы = 15 000 жыл) H, h элементтер аналогтарының тербеліс амплитудалары тұрақты болатынын көрсетеді. Айнымалы масса жағдайында тұрақты масса жағдайынан айырмашылығы амплитудалар уақыт бойынша өзгереді.



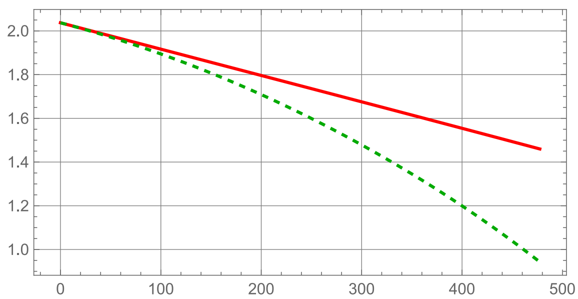
3.5-сурет. H'^* элемент аналогының эволюциясы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса



3.6-сурет. h'^* элемент аналогының эволюциясы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса



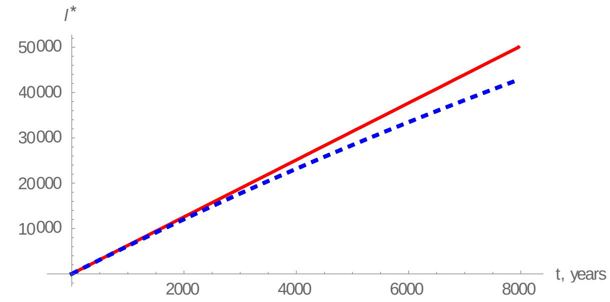
3.7-сурет. H'^* элемент аналогы, 4000 жыл уақыт аралығы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса



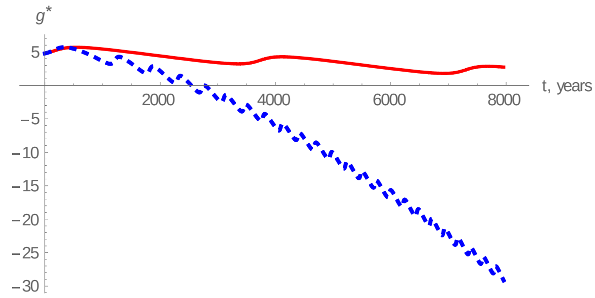
3.8-сурет. h'^* элемент аналогы, 500 жыл уақыт аралығы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса

3.5-3.8 суреттерден H' элемент аналогының айнымалы масса жағдайында тұрақты масса жағдайына қарағанда тербеліс периодының артатынын, h' элемент аналогы тұрақты және айнымалы масса жағдайларында кемімелі екенін көруге болады.

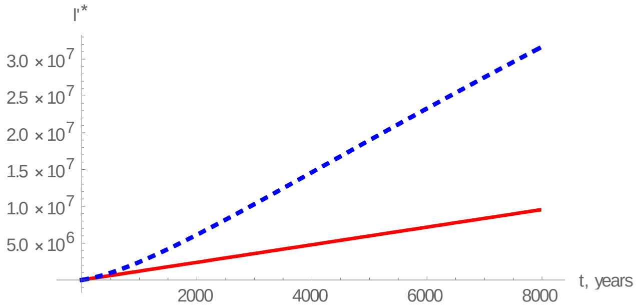
3.1-3.8 суреттерде 15000 жыл уақыт аралығындағы H, h, H', h' элементтер аналогтарының тұрақты масса мен айнымалы масса кезіндегі эволюциялары салыстырылған. Масса айнымалы кезінде H, h, H', h' элементтер аналогтарының айнымалы екенін көруге болады. 15000 жылда Юпитер 8432 айналым жасайды.



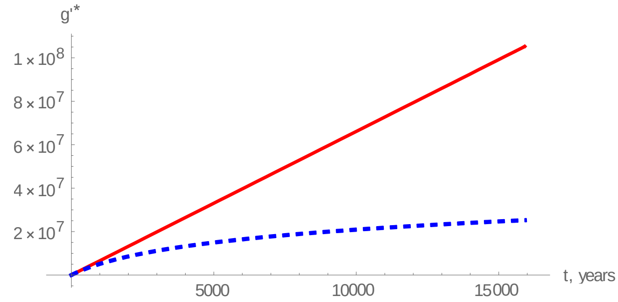
3.9-сурет. l^* элемент аналогының эволюциясы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса



3.10-сурет. g^* элемент аналогының эволюциясы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса

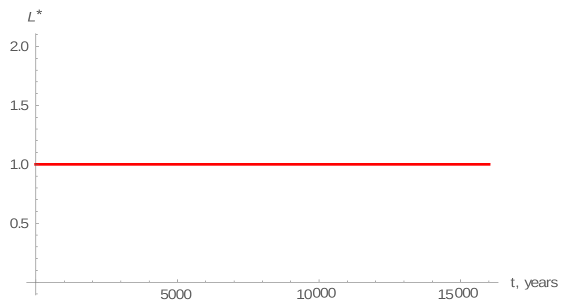


3.11-сурет. l'^* элемент аналогының эволюциясы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса

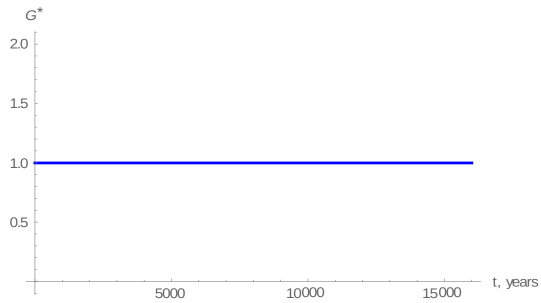


3.12-сурет. g'^* элемент аналогының эволюциясы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса

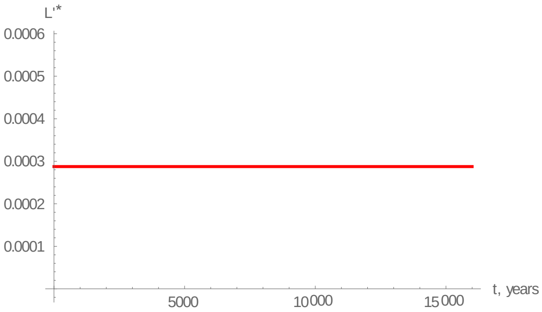
3.9-3.11 суреттерде 15000 жыл уақыт интервалындағы l, g, l', g' элементтер аналогтарының тұрақты масса мен айнымалы масса жағдайындағы эволюциялары салыстырылған. Масса айнымалы жағдайда l, g, l', g' элементтер аналогтарының тұрақты масса жағдайынан ауытқуын және l, l', g' элементтер аналогтарының өспелі, g элемент аналогының кемімелі екенін көруге болады.



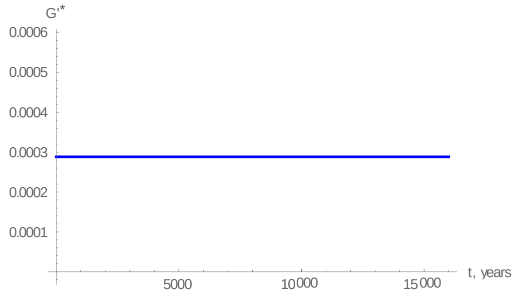
3.13-сурет. L^* элемент аналогының эволюциясы



3.14-сурет. G^* элемент аналогының эволюциясы



3.15-сурет. L'^{*} элемент аналогының эволюциясы



3.16-сурет. G'^{*} элемент аналогының эволюциясы

3.13-3.16 суреттерде 15000 жыл уақыт интервалындағы L, G, L', G' элементтер аналогтарының айнымалы масса кезіндегі эволюциясы көрсетілген және бұл элементтер аналогтарының тұрақты болып қалатынын көруге болады.

3.4 Бірінші интегралдың үш өлшемді графиктері

(2.3.5)-формуладағы $H = G\cos i,\ \ h = \Omega$ Делоне және Кеплер элементтер аналогтарының арасындағы байланыс формулалары мен (2.3.11)-формуладағы $H' = G'\cos I',\ \ L' = G'\cos J'$ Андуайе және Эйлер элементтер аналогтарының арасындағы байланыс формулаларын (2.7.26)-шi бірінші интегралға қоятын болсақ, келесідей бірінші интеграл түрін аламыз [48]

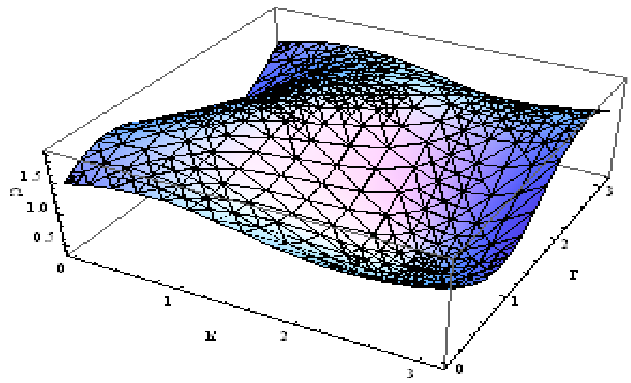
$$
\begin{aligned}
I = {} & \frac{1}{2GG'^3}\Big(GG'^3\big(3+\cos[2(h'-\Omega)]+\cos^2 I'\cos^2[h'+\Omega]+ \\
& +3\cos^2 I'\cos[2J']\cos^2[h'+\Omega]-\cos^2 J'\big(1+\cos[2(h'-\Omega)]+ \\
& +2\cos[2(h'+\Omega)]\big)\big)-\frac{1}{2}GG'^3\cos^2 i\big(4\cos^2[h'-\Omega]+\cos^2 I'\cdot \\
& \cdot\big(1+3\cos[2J'](3+\cos[2(h'+\Omega)])\big)-2\cos^2 J'(3+\cos[2(h'-\Omega)]+ \\
& +2\cos[2(h'+\Omega)])\big)-4\cos i\cos I'\cos[h'+\Omega]\sqrt{G^2\sin^2 i}\,\big(-2G'^2\cdot \\
& \cdot\cos^2 J'\sqrt{G'^2\sin^2 I'}+\sqrt{G'^2\sin^2 J'}\sqrt{G'^4\sin^2 I'\sin^2 J'}\big)\Big),
\end{aligned}
\qquad (3.4.1)
$$

(3.2.1)-(3.2.4) формулалардағы өлшемсіз шамаларды пайдаланып, сәйкесінше бірінші интегралды да толығымен өлшемсіз шамаларға өткіземіз

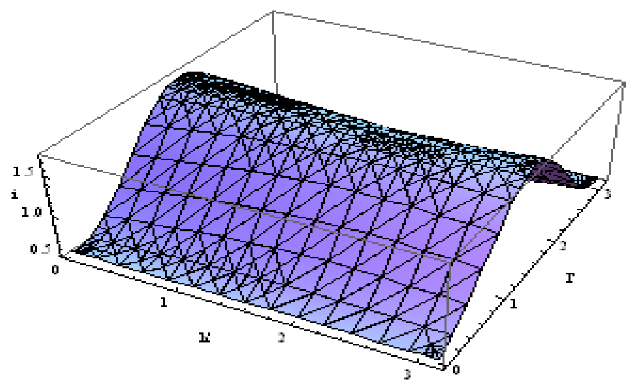
$$
\begin{aligned}
I = {} & \frac{1}{2G^{*}G'^{*3}}\Big(G^{*}G'^{*3}\big(3+\cos\left[2\left(h'-\Omega\right)\right]+\cos^{2} I'\cos^{2}\left[h'+\Omega\right]+ \\
& +3\cos^{2} I'\cos\left[2J'\right]\cos^{2}\left[h'+\Omega\right]-\cos^{2} J'\big(1+\cos\left[2\left(h'-\Omega\right)\right]+ \\
& +2\cos\left[2\left(h'+\Omega\right)\right]\big)\big)-\frac{1}{2}G^{*}G'^{*3}\cos^{2} i\big(4\cos^{2}\left[h'-\Omega\right]+\cos^{2} I'\cdot \\
& \cdot\big(1+3\cos\left[2J'\right]\big(3+\cos\left[2\left(h'+\Omega\right)\right]\big)\big)-2\cos^{2} J'\big(3+\cos\left[2\left(h'-\Omega\right)\right]+ \\
& +2\cos\left[2\left(h'+\Omega\right)\right]\big)\big)-4\cos i\cos I'\cos\left[h'+\Omega\right]\sqrt{G^{*2}\sin^{2} i}\,\big(-2G'^{*2}\cdot \\
& \cdot\cos^{2} J'\sqrt{G'^{*2}\sin^{2} I'}+\sqrt{G'^{*2}\sin^{2} J'}\sqrt{G'^{*4}\sin^{2} I'\sin^{2} J'}\Big),
\end{aligned}
\qquad (3.4.2)
$$

(3.4.2) формулада алынған бірінші интеграл Ω, i, I', h' айнымалыларынан тәуелді. Бұл айнымалылардың біріне тұрақты мән беріп, ал қалған үш айнымалы арқылы үш өлшемді график тұрғызылған. Жоғарыдағы мәліметтер графиктерді қарастыруға және алуға жеткілікті.

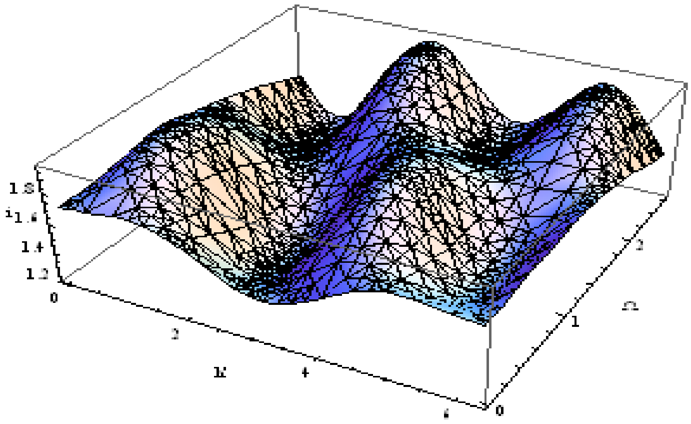
Mathematica жүйесін пайдалану арқылы (3.4.2) интегралдың үш өлшемді графиктері алынды [48]



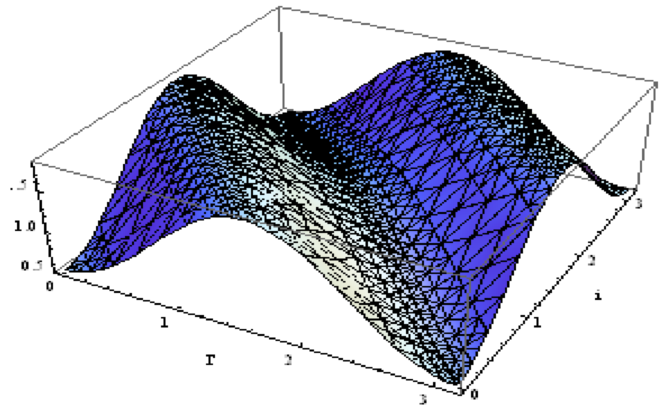
3.17-сурет. $i = const$ жағдайындағы интеграл графигі, қалған шамалар (3.2.1)-(3.2.4) бойынша.



3.18-сурет. $\Omega = const$ жағдайындағы интеграл графигі, қалған шамалар (3.2.1)-(3.2.4) бойынша.



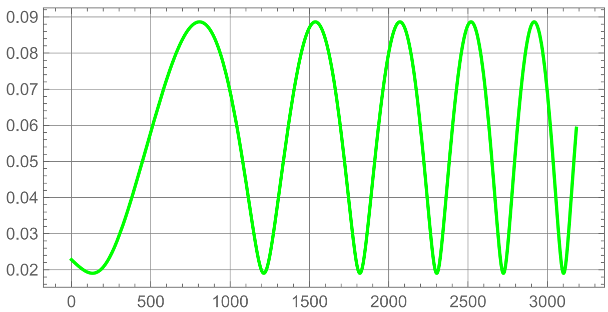
3.19-сурет. $I' = const$ жағдайындағы интеграл графигі, қалған шамалар (3.2.1)-(3.2.4) бойынша.



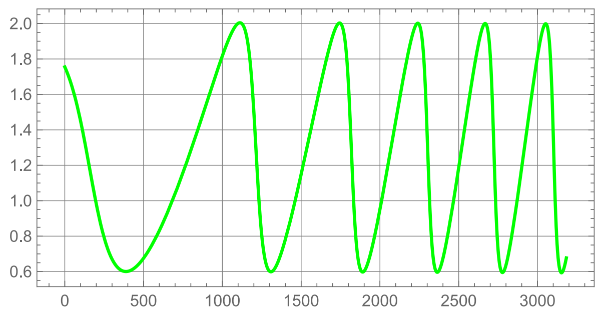
3.20-сурет. $h' = const$ жағдайындағы интеграл графигі, қалған шамалар (3.2.1)-(3.2.4) бойынша.

3.5 Кеплер және Эйлер элементтер аналогтарын визуализациялау

(2.8.6)-(2.8.8) Кеплер элементтер аналогтарының ғасырлық ұйытқу теңдеулерін пайдалана отырып, 3000 жыл уақыт аралығындағы Юпитердің орбита элементтер аналогтарының эволюциясының графиктері тұрғызылды.



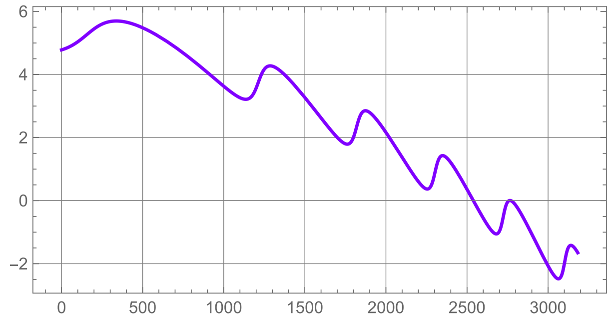
3.21-сурет. Орбиталық i көлбеулік



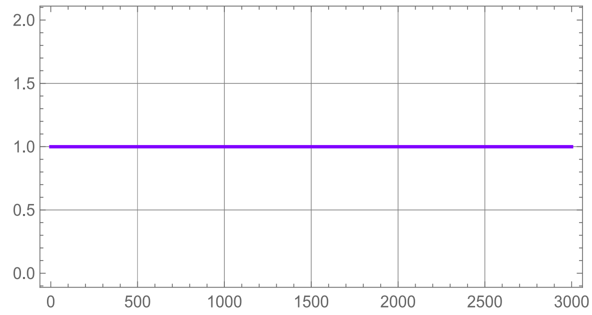
3.22-сурет. Ω жарқырау түйін

бұрыш аналогының 3000 жыл уақыт аралындағы эволюциясы

бойлық аналогының 3000 жыл уақыт аралындағы эволюциясы

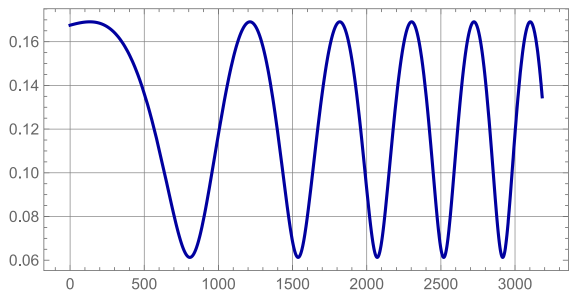


3.23-сурет. ω перицентр аргумент аналогының 3000 жыл уақыт аралығындағы эволюциясы

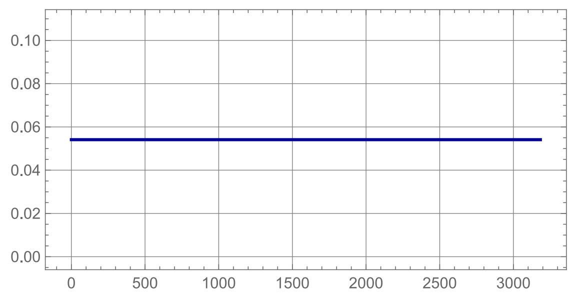


3.24-сурет. e эксцентриситет аналогының тұрақты болып сақталуы

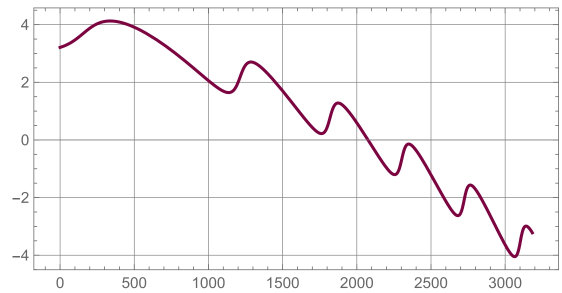
(2.8.10)-(2.8.17) Андуайе элементтер аналогтарының ғасырлық ұйытқу теңдеулерін пайдаланып, 3000 жыл уақыт аралығындағы Юпитердің Андуайе және Эйлер бұрыш аналогтарының графиктері тұрғызылды.



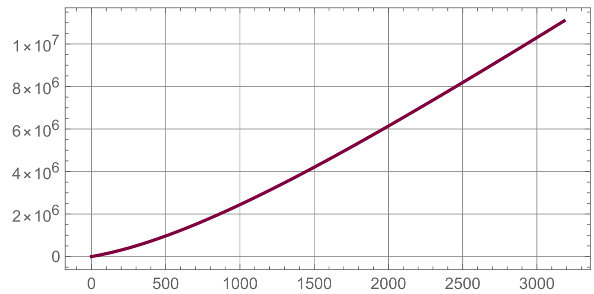
3.25-сурет. I' бұрыш аналогының 3000 жыл уақыт аралығындағы эволюциясы



3.26-сурет. J' бұрыш аналогының 3000 жыл уақыт аралығындағы эволюциясы



3.27-сурет. ψ бұрыш аналогының 3000 жыл уақыт аралығындағы эволюциясы



3.28-сурет. φ бұрыш аналогының 3000 жыл уақыт аралығындағы эволюциясы

ҚОРЫТЫНДЫ

Аналитикалық тәсілмен массасы мен өлшемі айнымалы өстік симметриялы дененің бейстационар центрлік өрістегі ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын сипаттайтын Делоне-Андуайе айнымалыларында, бірінші ретті, он екі теңдеуден тұратын ғасырлық ұйытқуды сипаттайтын жүйе алынды. Қозғалысты сипаттайтын он екі шаманың төрт импульсі тұрақты, сәйкес төрт бұрышы айнымалы. Қалғаны, бір алғашқы интегралы бар екі импульс және екі бұрыштан тұратын төрт теңдеулі ішкі жүйе.

Алынған ілгерілемелі-айналмалы қозғалысты сипаттайтын ғасырлық ұйытқу теңдеулерінің геометриялық және механикалық интерпретациясы жасалынды. Біздің қарастырған мәселенің физикалық қойылымы бойынша жоғарыда көрсетілген геометриялық және механикалық интерпретациялар қарастырылған мәселе үшін кез-келген бастапқы мәндері және массасы мен өлшемдерді сипаттайтын кез-келген функциялар үшін жалпы қасиеттер болып табылады.

Бейстационар өстік симметриялы дене Юпитердің центрлік дене Күннің өрісіндегі ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын сипаттайтын Делоне-Андуайе элементтер аналогтарындағы ғасырлық ұйытқу теңдеулері Wolfram Marthematica компьютерлік алгебра жүйесін пайдаланып сандық тәсілмен шешіліп, графиктері алынды. Есептеулер денелердің әр түрлі қарқында изотропты өзгеретін айнымалы масса жағдайда және массасы тұрақты жағдайында орындалып, салыстырулар жүргізілді.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Дубошин Г.Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. – 799 с.

2 Дубошин Г.Н. О некоторых частных решениях задачи о поступательно-вращательном движении двух тел // Сообщ. гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга. – 1960. – №106. – С. 13-18.

3 Дубошин Г.Н. О дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения взаимно притягивающих тел // Астрон. ж. – 1958. – Т. 35, № 2. – С. 265-276.

4 Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1975. – 308 с.

5 Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. – 416 с.

6 Белецкий В.В. Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс // Искусств. спут. Земли. – 1958. – Вып. 1. – С. 25-43.

7 Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центрамасс по действием гравитационных моментов // Прикл. матем. и мех., 1963. – Т.27, № 3. – С. 474-483.

8 Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники, сер. Исследование космического пространства. – М.: ВИНИТИ, 1978. – Т.11. – 224 с.

9 Видякин В.В. Поступательно-вращательное движение двух твердых тел: Учебное пособие. Архангельск: ДКПО “Норд”, 1996. – 184 с.

10 Видякин В.В. Поступательно-вращательное движение абсолютно твердых тел. Архангельск: Поморск. пед. ун-т., 1995. – 155 с.

11 Видякин В.В. О некоторых подходах к решению проблемы поступательно-вращательного движения твердых тел // Тр. каф. прикл. матем. АГТУ. – Архангельск, 2001. – Вып. 1. – С. 5-22.

12 Видякин В.В. О проблеме поступательно-вращательного движения абсолютно твердых тел // Тр. каф. прикл. матем. АГТУ. – Архангельск, 2004. – Вып. 3. – С. 49-59.

13 Баркин Ю.В., Демин В.Г. Поступательно-вращательное движение небесных тел // Итоги науки и техн. АН СССР. Астрономия. – 1982. Т. 20. – С. 115-134.

14 Баркин Ю.В. Вековые эффекты в поступательно-вращательном движении планет, обусловленные их несферичностью // Астрономический Вестник, 1977. – Т. 15, № 2. – С. 105-112.

15 Баркин М.Ю. Приближенное решение задачи Лиувилля в переменных действие-угол для задачи Эйлера-Пуансо // Труды МАИ. – 2014. – Вып. 72.

16 Yu.V. Barkin. Equations of translational-rotational motion of celestial bodies in osculating elements. // Soviet Astronomy, 1977. – Vol. 21, No. 2,

17 Баркин Ю.В. Динамические системы несферичных небесных тел и теория вращения Луны: Автреф. дис. . . . док. физ.-мат. наук: 01.03.01. – М.: гос. астрон. ин-т. им. П.К. Штернберга, 1989. – 44 с.
18 Журавлев С.Г., Петруцкий А.А. Задача о поступательно-вращательном движении трех твердых тел: простейшая классификация и современное состояние проблемы. М.: 1989. – 64 с.
19 Журавлев С.Г., Петруцкий А.А. Современное состояние проблемы поступательно-вращательного движения трех твердых тел // Астрон. ж. – 1990. – Т. 67, № 3. – С. 602-611.
20 Журавлев С.Г. Метод исследования острорезонансных задач небесной механики и космодинамики. Т2. Поступательно-вращательное движение. - Архангельск: Солти, 2002. – 368 с.
21 Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А. Общая теория вращения Земли. – М.: Наука, 1984. – 255 с.
22 Ержанов Ж.С., Наурызбаев М.А. Моменты и полюс инерции Земли при ее оледенении // Изв. АН КазССР, Сер. физ-матем. – 1984. – №3. – С. 28-31.
23 Ержанов Ж.С., Наурызбаев М.А. Об эйлеровом вращении Земли переменного состава // Изв. АН КазССР, Сер. Физ-матем. – 1983. – №3. – С. 25-30.
24 Калыбаев А.А. Эволюция поступательно-вращательного движения твердой и упругой Земли. Автореф. дисс. . . . докт. физ.-мат. наук: 01.03.01 – М.: МГУ ГАИШ, 1988. – 39 с.
25 Omarov T.B. Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. N-Y: Nova Science Publ., 2002. – 260 p.
26 Омаров Т.Б. Динамика гравитирующих систем Метагалактики. – Алма-Ата: Наука, 1975. – 143 с.
27 Беков А.А. О поверхности Хилла в окрестности вращающегося нестационарного трехосного эллипсоида // Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем. – Алма-Ата: 1990. – №4. – С. 49-52.
28 Bekov A.A., Omarov T.B. The theory of orbits in non-stationary stellar systems // Astronomy and Astrophysics Transactions. 2003. – Vol. 22. № 2. – P. 145-153.
29 Черепащук А.М. Тесные двойные звезды. Часть II. М.: Физматлит, 2013. – 572 с.
30 Eggleton P. Evolutionary processes in binary and multiple stars. N-Y: Cambridge University Press, 2006. – 332 p.
31 Лукьянов Л.Г. Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс //Астрон. журн. – 2008. – Т. 52, № 8. – С. 680-693.
32 Минглибаев М.Дж. Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Изд. «LAP LAMBERT Academic Publishing», 2012. – 229 с.

33 L.A. Balona, H.F.Henrichs and J.M. le Contel (edit.). Pulsation Rotation and mass loss in early type stars. // Proceed. №162 Sym. Of the I.A.U. – Dordrecht: Kluver, 1994. – 394 p.
34 Масевич А.Г., Тутуков А.В. Эволюция звезд: теория и наблюдения. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
35 Бэттен А. Двойные и кратные звезды. – М.: Мир, 1976. – 324 с.
36 Кожанов Т.С. Гравитационная динамика иерархических систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2003. – 290 с.
37 Кокс Дж.П. Теория звездных пульсаций. – М.: Мир, 1983. – 326 с.
38 Abad, A., Calvo, M., Docobo, J. A., & Elipe, A. On the Orbital Elements of the Two-body Problem with Slowly Decreasing Mass: The Gyldén-Mestchersky Cases // The Astronomical Journal. 2020. – Vol. 160. – Issue 5. – 12 pp. doi: 10.3847/1538-3881/abb4e4
39 М.Дж. Минглибаев, С.Б. Бижанова. Өстік симметриялы бейстационар екі дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері // Вестник КБТУ. Серия «Физико-математические и технические науки». – 2019. – Т. 16, № 2. – С. 143-149.
40 S.B. Bizhanova, M.Zh. Minglibayev, A.A. Prokopenya. A Study of Secular Perturbations of Translational-Rotational Motion in a Nonstationary Two-Body Problem Using Computer Algebra // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2020. – Vol. 60. – №. 1. – P. 26-35. https://doi.org/10.1134/S0965542520010054
41 Minglibayev M.Zh., Ahmetrassulova A.A. Secular perturbations in the problem of translational rotational motion two axisymmetric non-stationary gravitating bodies with variable oblate. In: Classical and Celestial Mechanics. Selected Papers, L. Gadomski, P. Krasilnikov, A. Prokopenya (Eds.). Siedlce: Wydawnictwo Colleguim Mazovia, 2012. – P. 116-126.
42 Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. – М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 576 с.
43 Беков А.А., Омаров Т.Б. Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона-Якоби и некоторые нестационарные задачи небесной механики //Астрон. журн. – 1978. – Т. 55, № 3. – С. 635-644.
44 Беков А.А. Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона-Якоби и динамические системы, приводимые к канонической форме // ПММ. – 1986. – Т. 50, № 5. – С. 717-726.
45 Минглибаев М.Дж. К канонической теории возмущений в небесной механике тел переменной массы //Труды АФИ АН КазССР. – Алматы: Ғылым, 1992. – Т. 50. – С. 71-78.
46 М.Дж. Минглибаев, С.Б. Бижанова. Массасы мен өлшемі айнымалы өстік симметриялы дененің эволюциялық теңдеулерін зерттеу // Вестник КазНПУ им Абая. Серия «Физико-математические науки». – 2020. – Т. 69. – №1. – С. 251-257.

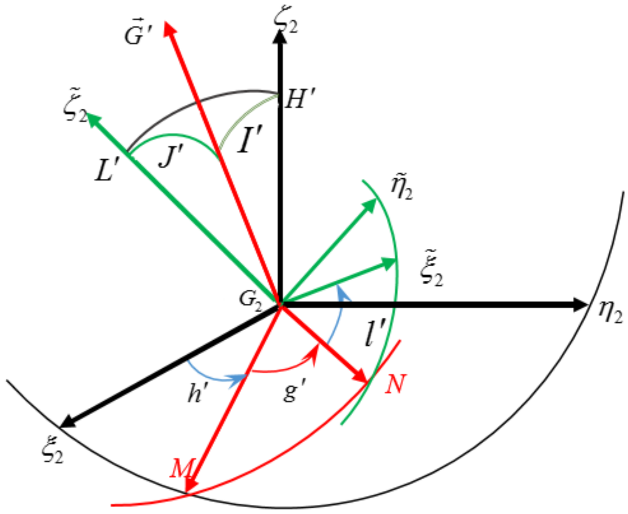
47 A.A. Prokopenya, M.Zh. Minglibayev, S.B. Bizhanova. Investigation of the Evolution Equations of the Two-Body Problem with Variable Masses // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. – 2020. – Vol. IX. – P. 204-219.
48 M.Zh. Minglibayev, S.B. Bizhanova. Translational-rotational motion of a nonstationary axisymmetric body // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2021. – Vol. 336, № 2. – P. 131-137.
49 M. Minglibayev, A. Prokopenya, S. Bizhanova. Analysis of Evolution Equations of a Nonstationary Axisymmetric Body in a Nonstationary Central Gravitational Field // 8th International Congress of Serbian Society of Mechanics Kragujevac, Serbia, June 28-30, 2021. – P. 638-647.
50 Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М. Символьные вычисления в исследованиях проблемы трех тел с переменными массами // Программирование. – 2014. – Т. 40. № 2. – С. 51-59.
51 Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Шомшекова С.А. Применение компьютерной алгебры в исследованиях двухпланетной задачи трех тел с переменными массами // Программирование. – 2019. Т. 45, № 2. – С. 58-65.
52 Prokopenya, A.N., Minglibayev, M.Zh., Shomshekova, S.A.: Application of computer algebra in the study of the two-planet problem of three bodies with variable masses // Programming and Computer Software. – 2019. – Vol. 45, № 2, – P. 73-80.
53 Jeans J.H. The effect of varying mass on a binary system // Monthly Notices of the Royal Astronimical Society. – 1925. – Vol. 85. – P. 912-914.
54 Прокопеня А.Н. Решение физических задач с использованием системы Mathematica. Брест: Изд. БГТУ, 2005. – 260 с.
55 Wolfram S. An Elementary Introduction to the Wolfram Language. Champaign, IL: Wolfram Media, 2015. – 324 p.
56 Wolfram S. The Mathematica book. 4th ed. - Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.
57 Воробьев Е.М. Введение в систему «Математика»: учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 262 с.
58 Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. – Минск: БГУ, 1999. – 265 с.
59 Filtergraph 2023, Source: exoplanetarchive.ipac.caltech.edu, p. May 03
60 NASA 2021, doi: 10.26133/NEA12, p. November 10
61 NASA 2023, https://exoplanets.nasa.gov/ , p. October 12
62 К.У. Аллен. Астрофизические величины // М.: Мир, 1977. – 279 с.
63 В.Г. Сурдин. Солнечная система // Астрономия и Астрофизика. Москва, Физматлит, 2017. – 460 с.
64 Brian D. Mason, Gary L. Wycoff, William I. Hartkopf, Geoffrey G. Douglass, and Charles E. Worley. The 2001 US Naval Observatory Double Star CD-ROM. I. The Washington Double Star Catalog // The Astronomical Journal, 2001, Vol. 122, Issue 6, P. 3466-3471. doi: 10.1086/323920

65 Romanenko L.G., Kiyaeva O.V., Izmailov I.S., Shakht N.A., Gorshanov D.L. The Pulkovo catalog of the orbits obtained for the visual binary and multiple stars by the Apparent Motion parameters method.
66 Kisselev, A. A., Bykov, O. P., Kalinichenko, O. A., Kiyaeva, O. V., Romanenko, L. G., & Shakht, N. A. The Pulkovo Programme for the Study of Visual Double Stars // Journal: Inertial Coordinate System on the Sky, Proceedings of IAU Symposium No. 141 held 17-21 October 1989 in Leningrad, USSR. Edited by J.H. Lieske and V.K. Abalakin. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 63, 1989. Bibliographic Code: 1990IAUS..141...63K.
67 Prokopenya, A.N., Minglibayev, M.Zh., Beketauov, B.A.: Secular perturbations of quasi-elliptic orbits in the restricted three-body problem with variable masses. Int. J. Non-Linear Mech. 73, 2015, – С. 58-63.
68 Prokopenya, A.N., Minglibayev, M.Zh., Mayemerova, G.M., Imanova, Zh.U.: Investigation of the restricted problem of three bodies of variable masses using computer algebra // Programming and Computer Software. – 2017. – Vol. 43, № 5, – С. 289-293.
69 Prokopenya, A.N., Minglibayev, M.Zh., Shomshekova, S.A.: Application of computer algebra in the study of the two-planet problem of three bodies with variable masses. Programming and Computer Software. – 2019. – Vol. 45, № 2, – С. 73-80.
70 Prokopenya, A., Minglibayev, M., Baisbayeva, O.: Analytical computations in studying translational-rotational motion of a non-stationary triaxial body in the central gravitational field // Lecture Notes in Computer Science. – 2020. Vol. 12291, – P. 478-491. doi:10.1007/978-3-030-60026-6_28
71 Boccaletti, D., Pucacco, G.: Theory of Orbits. Vol. 2: Perturbative and Geometrical Methods. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2022.

ҚОСЫМША А

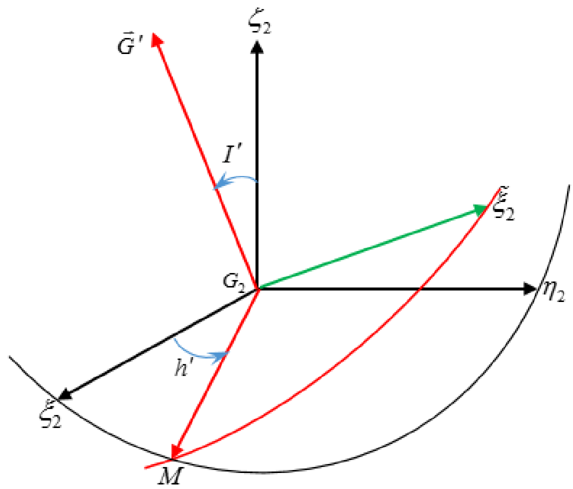
Қозғалмайтын және қозғалмалы координаталардың арасындағы бұрыштардың бағыттауыш косинустарын Андуайе айнымалылары арқылы өрнектеу

$G_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ қозғалмайтын координата жүйесін енгіземіз. $G_2\zeta_2$ өсі төңірегінде h' бұрышына сағат тіліне қарама-қарсы бағытта бұрамыз. Ары қарай $G_2\xi_2$ өсі төңірегінде бұру жасаймыз, содан I' бұрышын аламыз.



А.1-сурет. Координаттар жүйесі

$G_2\xi_2$ өсін бұру арқылы алынған I' бұрышы мынадай болады



А.2-сурет. Бірінші бұрылу

Бұл түрлендірулердің матрицасын келесі түрде жазамыз:

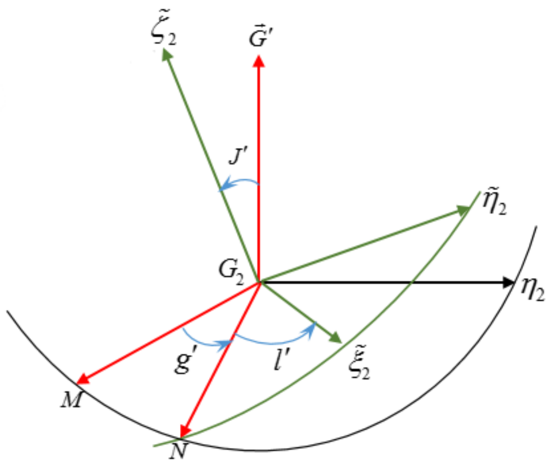
$$\Pi(3,h')=\begin{pmatrix}\cos h' & \sin h' & 0\\ -\sin h' & \cos h' & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad\qquad \Pi(3,h')=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos I' & \sin I'\\ 0 & -\sin I' & \cos I'\end{pmatrix},$$

A_1 матрицасы бұру матрицаларын көбейткеннен пайда болады:

$$A_1=\Pi(1,I')\Pi(3,h'),$$

ал A_2 матрицасы суретте көрсетілгендей g', l', J' бұрыштары арқылы алынады:

$$A_2=\Pi(3,l')\Pi(1,J')\Pi(3,g'),$$



А.3-сурет. Екінші бұрылу

$$\Pi(3,l')=\begin{pmatrix}\cos l' & \sin l' & 0\\ -\sin l' & \cos l' & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad\qquad \Pi(1,J')=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos J' & \sin J'\\ 0 & -\sin J' & \cos J'\end{pmatrix},$$

$$\Pi(3,g')=\begin{pmatrix}\cos g' & \sin g' & 0\\ -\sin g' & \cos g' & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

Сол себепті

$$A=A_1A_2=\Pi(3,l')\Pi(1,J')\Pi(3,g')\Pi(1,I')\Pi(3,h'),$$

өрнегі бұрылу матрицасын анықтайды.

Енді $\vec{k}$ векторы компоненттерінің $G_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ өстеріне проекцияларын аламыз

$$a_{31} == \cos\left(\overrightarrow{G_2\tilde{\xi}_2} \wedge \overrightarrow{G_2\zeta_2}\right),$$
$$a_{32} = \cos\left(\overrightarrow{G_2\tilde{\eta}_2} \wedge \overrightarrow{G_2\zeta_2}\right),$$
$$a_{33} = \cos\left(\overrightarrow{G_2\tilde{\zeta}_2} \wedge \overrightarrow{G_2\zeta_2}\right),$$

$$A \cdot \vec{k} = \Pi(3, l')\,\Pi(1, J')\,\Pi(3, g')\,\Pi(1, I')\,\Pi(3, h')\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

мыналар белгілі:

$$\Pi(3, h')\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Pi(3, I')\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin I' \\ \cos I' \end{pmatrix},$$

Сонымен

$$\Pi(1, I')\,\Pi(3, h')\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{k}_2 \sin I' + \vec{k}_3 \cos I',$$

Енді A_2 матрицасын $\vec{k}_2$ және $\vec{k}_3$ векторларына көбейтіп

$$A \cdot \vec{k} = \left(A_2\vec{k}_2\right)\sin I' + \left(A_2\vec{k}_3\right)\cos I',$$

Келесі өрнекті аламыз:

$$a_{31} = \sin I' \sin g' \cos l' + \sin I' \cos J' \cos g' \sin l' - \cos I' \sin l' \sin J',$$
$$a_{32} = \sin I' \cos J' \cos l' \cos g' - \sin I' \sin g' \sin l' + \cos I' \cos l' \sin J',$$
$$a_{33} = \cos I' \cos J' - \sin I' \cos g' \sin J',$$

Осы алгоритмді $\vec{j}$ векторымен қайталаймыз:

$$a_{21} = \cos\left(\overrightarrow{G_2\tilde{\xi}_2} \wedge \overrightarrow{G_2\eta_2}\right),$$
$$a_{22} = \cos\left(\overrightarrow{G_2\tilde{\eta}_2} \wedge \overrightarrow{G_2\eta_2}\right),$$
$$a_{23} = \cos\left(\overrightarrow{G_2\tilde{\zeta}_2} \wedge \overrightarrow{G_2\eta_2}\right),$$

$$A \cdot \vec{j} = \Pi(3, l')\,\Pi(1, J')\,\Pi(3, g')\,\Pi(1, I')\,\Pi(3, h')\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Сәйкес шығатыны:

$$\Pi(3, h')\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin h' \\ \cos h' \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Pi(1, I')\begin{pmatrix} \sin h' \\ \cos h' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin h' \\ \cos h' \cos I' \\ -\cos h' \sin I' \end{pmatrix},$$

Сондықтан

$$\Pi(1, I')\,\Pi(3, h')\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{j}_1 \sin h' + \vec{j}_2 \cos h' \cos I' - \vec{j}_3 \cos h' \sin I',$$

Енді A_2 матрицасын $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$ векторларына көбейтіп

$$A \cdot \vec{j} = \left(A_2 \vec{j}_1\right)\sin h' + \left(A_2 \vec{j}_2\right)\cos h' \cos I' - \left(A_2 \vec{j}_3\right)\cos h' \sin I',$$

келесі өрнекті аламыз:

$$\begin{aligned} a_{21} &= \sin h' \cos g' \cos l' - \sin h' \cos J' \sin g' \sin l' + \cos h' \cos I' \cos l' \sin g' + \\ &\quad + \cos h' \cos I' \cos g' \cos J' \sin l' - \cos h' \sin I' \sin l' \sin J', \\ a_{22} &= -\sin h' \cos J' \cos l' \sin g' - \sin h' \cos g' \sin l' + \cos h' \cos I' \cos g' \cos l' \cos J' - \\ &\quad - \cos h' \cos I' \sin g' \sin l' - \cos h' \sin I' \cos l' \sin J', \\ a_{23} &= \sin h' \sin J' \sin g' - \cos h' \sin I' \cos J' - \cos h' \cos I' \cos g' \sin J', \end{aligned}$$

$\vec{i}$ векторымен де осы амалды орындаймыз:

$$a_{11} = \cos\left(\overrightarrow{G_2\tilde{\xi}_2} \wedge \overrightarrow{G_2\xi_2}\right),$$
$$a_{12} = \cos\left(\overrightarrow{G_2\tilde{\eta}_2} \wedge \overrightarrow{G_2\xi_2}\right),$$
$$a_{13} = \cos\left(\overrightarrow{G_2\tilde{\zeta}_2} \wedge \overrightarrow{G_2\xi_2}\right),$$

$$A\cdot\vec{i} = \varPi\left(3,l'\right)\varPi\left(1,J'\right)\varPi\left(3,g'\right)\varPi\left(1,I'\right)\varPi\left(3,h'\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

Сонда шығатыны:

$$\varPi\left(3,h'\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos h'\\-\sin h'\\0\end{pmatrix}, \qquad \varPi\left(1,I'\right)\begin{pmatrix}\cos h'\\-\sin h'\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos h'\\-\sin h'\cos I'\\-\sin h'\sin I'\end{pmatrix},$$

және

$$\varPi\left(1,I'\right)\varPi\left(3,h'\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{i}_1\cos h' - \vec{i}_2\sin h'\cos I' - \vec{i}_3\sin h'\sin I',$$

A_2 матрицасын $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ векторларына көбейткенде

$$A\cdot\vec{i} = \left(A_2\vec{i}_1\right)\cos h' - \left(A_2\vec{i}_2\right)\sin h'\cos I' - \left(A_2\vec{i}_3\right)\sin h'\sin I',$$

келесі өрнектер табылады:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos h'\cos g'\cos l' - \cos h'\cos J'\sin g'\sin l' - \sin h'\cos I'\cos l'\sin g' - \\
&\quad - \sin h'\cos I'\cos g'\cos J'\sin l' + \sin h'\sin I'\sin l'\sin J',\\
a_{12} &= -\cos h'\cos J'\cos l'\sin g' - \cos h'\cos g'\sin l' - \sin h'\cos I'\cos g'\cos l'\cos J' + \\
&\quad + \sin h'\cos I'\sin g'\sin l' + \sin h'\sin I'\cos l'\sin J',\\
a_{13} &= \cos h'\sin J'\sin g' - \sin h'\sin I'\cos J' + \sin h'\cos I'\cos g'\sin J',
\end{aligned}$$

ҚОСЫМША Б

$$(\epsilon_{11} + \mathrm{Sin}[g1]\,\epsilon_{12} + \mathrm{Cos}[g1]\,\epsilon_{13})\,(\mathrm{Sin}[v]\,\tau_{11} + \mathrm{Cos}[v]\,\tau_{12}) + (\epsilon_{21} + \mathrm{Sin}[g1]\,\epsilon_{22} + \mathrm{Cos}[g1]\,\epsilon_{23})\,(\mathrm{Sin}[v]\,\tau_{21} + \mathrm{Cos}[v]\,\tau_{22}) + (\epsilon_{31} + \mathrm{Cos}[g1]\,\epsilon_{33})\,(\mathrm{Sin}[v]\,\tau_{31} + \mathrm{Cos}[v]\,\tau_{32})$$

Орташалауды тексереміз $[\rho^2]_{sec}$

$$\frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi}$$

$$\mathbf{Integrate}\left[\frac{a^2\,(1-e^2)^2}{(1+e\,\mathrm{Cos}[v])^4},\ \{v,\ 0,\ 2\pi\},\ \mathbf{Assumptions} \to \{0 < e < 1\}\right]$$

$[\rho^{-3}]_{sec}$

$$\frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi}\,\mathbf{Integrate}\left[\frac{(1+e\,\mathrm{Cos}[v])}{a^3\,(1-e^2)^3},\ \{v,\ 0,\ 2\pi\},\ \mathbf{Assumptions} \to \{0 < e < 1\}\right]\ //\ \mathbf{Simplify}[\#,\ 0 < e < 1]\ \&$$

$[\gamma^2\,\rho^{-3}]_{sec}$

$$\frac{1}{4\pi^2}\,(1+e\,\mathrm{Cos}[v])\,\gamma^2\ //\ \mathbf{Expand}\ //\ \mathbf{TrigReduce}\ //\ \mathbf{Integrate}[\#,\ \{v,\ 0,\ 2\pi\}]\ \&\ //\ \mathbf{Integrate}[\#,\ \{g1,\ 0,\ 2\pi\}]\ \&$$

$$\frac{1}{4}\Big(\epsilon_{13}^2\,\tau_{11}^2 + \epsilon_{13}^2\,\tau_{12}^2 + 2\,\epsilon_{11}^2\,(\tau_{11}^2+\tau_{12}^2) + \epsilon_{12}^2\,(\tau_{11}^2+\tau_{12}^2) + 2\,\epsilon_{13}\,\epsilon_{23}\,\tau_{11}\,\tau_{21} + 2\,\epsilon_{21}^2\,\tau_{21}^2 + \epsilon_{22}^2\,\tau_{21}^2 + \epsilon_{23}^2\,\tau_{21}^2 + 2\,\epsilon_{13}\,\epsilon_{23}\,\tau_{12}\,\tau_{22} + 2\,\epsilon_{21}^2\,\tau_{22}^2 + \epsilon_{22}^2\,\tau_{22}^2 + \epsilon_{23}^2\,\tau_{22}^2 + 2\,\epsilon_{12}\,\epsilon_{22}\,(\tau_{11}\,\tau_{21}+\tau_{12}\,\tau_{22}) + 2\,\epsilon_{13}\,\epsilon_{33}\,\tau_{11}\,\tau_{31} + 4\,\epsilon_{21}\,\epsilon_{31}\,\tau_{21}\,\tau_{31} + 2\,\epsilon_{23}\,\epsilon_{33}\,\tau_{21}\,\tau_{31} + 2\,\epsilon_{31}^2\,\tau_{31}^2 + \epsilon_{33}^2\,\tau_{31}^2 + 2\,(\epsilon_{13}\,\epsilon_{33}\,\tau_{12} + (2\,\epsilon_{21}\,\epsilon_{31} + \epsilon_{23}\,\epsilon_{33})\,\tau_{22})\,\tau_{32} + (2\,\epsilon_{31}^2 + \epsilon_{33}^2)\,\tau_{32}^2 + 4\,\epsilon_{11}\,(\epsilon_{21}\,(\tau_{11}\,\tau_{21}+\tau_{12}\,\tau_{22}) + \epsilon_{31}\,(\tau_{11}\,\tau_{31}+\tau_{12}\,\tau_{32}))\Big)$$

$$\frac{1}{4\pi^2\,a^3\,(1-e^2)^{3/2}}\,\mathbf{Integrate}\left[(1+e\,\mathrm{Cos}[v])\,\gamma^2,\ \{v,\ 0,\ 2\pi\},\ \{g1,\ 0,\ 2\pi\},\ \mathbf{Assumptions} \to \{0 < e < 1\}\right]\ //\ \mathbf{Simplify}[\#,\ 0 < e < 1]\ \&$$

$$\frac{1}{4\,a^3\,(1-e^2)^{3/2}}\Big(\epsilon_{13}^2\,\tau_{11}^2 + \epsilon_{13}^2\,\tau_{12}^2 + 2\,\epsilon_{11}^2\,(\tau_{11}^2+\tau_{12}^2) + \epsilon_{12}^2\,(\tau_{11}^2+\tau_{12}^2) + 2\,\epsilon_{13}\,\epsilon_{23}\,\tau_{11}\,\tau_{21} + 2\,\epsilon_{21}^2\,\tau_{21}^2 + \epsilon_{22}^2\,\tau_{21}^2 + \epsilon_{23}^2\,\tau_{21}^2 + 2\,\epsilon_{13}\,\epsilon_{23}\,\tau_{12}\,\tau_{22} + 2\,\epsilon_{21}^2\,\tau_{22}^2 + \epsilon_{22}^2\,\tau_{22}^2 + \epsilon_{23}^2\,\tau_{22}^2 + 2\,\epsilon_{12}\,\epsilon_{22}\,(\tau_{11}\,\tau_{21}+\tau_{12}\,\tau_{22}) + 2\,\epsilon_{13}\,\epsilon_{33}\,\tau_{11}\,\tau_{31} + 4\,\epsilon_{21}\,\epsilon_{31}\,\tau_{21}\,\tau_{31} + 2\,\epsilon_{23}\,\epsilon_{33}\,\tau_{21}\,\tau_{31} + 2\,\epsilon_{31}^2\,\tau_{31}^2 + \epsilon_{33}^2\,\tau_{31}^2 + 2\,\epsilon_{13}\,\epsilon_{33}\,\tau_{12}\,\tau_{32} + 4\,\epsilon_{21}\,\epsilon_{31}\,\tau_{22}\,\tau_{32} + 2\,\epsilon_{23}\,\epsilon_{33}\,\tau_{22}\,\tau_{32} + 2\,\epsilon_{31}^2\,\tau_{32}^2 + \epsilon_{33}^2\,\tau_{32}^2 + 4\,\epsilon_{11}\,(\epsilon_{21}\,(\tau_{11}\,\tau_{21}+\tau_{12}\,\tau_{22}) + \epsilon_{31}\,(\tau_{11}\,\tau_{31}+\tau_{12}\,\tau_{32}))\Big)$$

```
ex2 = ex1 /. rul1 // Expand // Simplify[#, G1 > L1 && G1 > H1 && G > 0] &
```

$$-\frac{1}{2\,G^2\,G1^4}\Big(-3\,G^2\,G1^4+G1^4\,H^2+G^2\,G1^2\,H1^2-3\,G1^2\,H^2\,H1^2+G^2\,G1^2\,L1^2-3\,G1^2\,H^2\,L1^2-3\,G^2\,H1^2\,L1^2+9\,H^2\,H1^2\,L1^2-G1^2\left(G^2-H^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)\mathrm{Cos}[2\,h-2\,h1]+4\,H\sqrt{G^2-H^2}\;H1\left(-2\sqrt{G1^2-H1^2}\;L1^2+\sqrt{G1^2-L1^2}\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)\mathrm{Cos}[h+h1]+G^2\,G1^2\,H1^2\,\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]-G1^2\,H^2\,H1^2\,\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]+2\,G^2\,G1^2\,L1^2\,\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]-2\,G1^2\,H^2\,L1^2\,\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]-3\,G^2\,H1^2\,L1^2\,\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]+3\,H^2\,H1^2\,L1^2\,\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]\Big)$$

```
Collect[ex2, {Cos[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Cos[2 (h + h1)], G}, Simplify]
```

$$-\frac{H^2\left(\left(G1^2-3\,H1^2\right)\left(G1^2-3\,L1^2\right)+G1^2\left(G1^2-L1^2\right)\mathrm{Cos}[2\,(h-h1)]\right)}{2\,G^2\,G1^4}+\frac{3\,G1^4+3\,H1^2\,L1^2-G1^2\left(H1^2+L1^2\right)+G1^2\left(G1^2-L1^2\right)\mathrm{Cos}[2\,(h-h1)]}{2\,G1^4}-\frac{1}{G^2\,G1^4}2\,H\sqrt{G^2-H^2}\;H1\left(-2\sqrt{G1^2-H1^2}\;L1^2+\sqrt{G1^2-L1^2}\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)\mathrm{Cos}[h+h1]+\left(\frac{3\,H1^2\,L1^2-G1^2\left(H1^2+2\,L1^2\right)}{2\,G1^4}+\frac{H^2\left(-3\,H1^2\,L1^2+G1^2\left(H1^2+2\,L1^2\right)\right)}{2\,G^2\,G1^4}\right)\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]$$

```
ex3 = D[ex2, H] // Simplify
```

$$-\frac{1}{G^2\,G1^4}\Big(H\left(G1^2-3\,H1^2\right)\left(G1^2-3\,L1^2\right)+G1^2\,H\left(G1^2-L1^2\right)\mathrm{Cos}[2\,(h-h1)]+\frac{1}{\sqrt{G^2-H^2}}2\left(G^2-2\,H^2\right)H1\left(-2\sqrt{G1^2-H1^2}\;L1^2+\sqrt{G1^2-L1^2}\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)\mathrm{Cos}[h+h1]-H\left(-3\,H1^2\,L1^2+G1^2\left(H1^2+2\,L1^2\right)\right)\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]\Big)$$

```
Collect[ex3, {Cos[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Cos[2 (h + h1)], G}, Simplify]
```

$$-\frac{1}{G^2\,G1^4}\Big(H\left(G1^2-3\,H1^2\right)\left(G1^2-3\,L1^2\right)+G1^2\,H\left(G1^2-L1^2\right)\mathrm{Cos}[2\,(h-h1)]+\frac{1}{\sqrt{G^2-H^2}}2\left(G^2-2\,H^2\right)H1\left(-2\sqrt{G1^2-H1^2}\;L1^2+\sqrt{G1^2-L1^2}\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)\mathrm{Cos}[h+h1]-H\left(-3\,H1^2\,L1^2+G1^2\left(H1^2+2\,L1^2\right)\right)\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]\Big)$$

```
ex4 = D[ex2, h] // Simplify
```

$$\frac{1}{G^2\,G1^4}\left(-G1^2\left(G^2-H^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)\mathrm{Sin}[2\,(h-h1)]+2\left(H\sqrt{G^2-H^2}\;H1\left(-2\sqrt{G1^2-H1^2}\;L1^2+\sqrt{G1^2-L1^2}\;\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)+\left(G^2-H^2\right)\left(-3\,H1^2\,L1^2+G1^2\left(H1^2+2\,L1^2\right)\right)\mathrm{Cos}[h+h1]\right)\mathrm{Sin}[h+h1]\right)$$

```
Collect[ex4,
 {Sin[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Sin[h + h1], Sin[2 (h + h1)], G}, Simplify]
```

$$\left(-1+\frac{L1^2}{G1^2}+\frac{H^2\left(1-\frac{L1^2}{G1^2}\right)}{G^2}\right)\mathrm{Sin}[2\,(h-h1)]+\frac{1}{G^2\,G1^4}2\,H\sqrt{G^2-H^2}\;H1\left(-2\sqrt{G1^2-H1^2}\;L1^2+\sqrt{G1^2-L1^2}\;\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)\mathrm{Sin}[h+h1]+\left(-\frac{2\,H^2\left(-3\,H1^2\,L1^2+G1^2\left(H1^2+2\,L1^2\right)\right)}{G^2\,G1^4}+\frac{-6\,H1^2\,L1^2+2\,G1^2\left(H1^2+2\,L1^2\right)}{G1^4}\right)\mathrm{Cos}[h+h1]\,\mathrm{Sin}[h+h1]$$

```
ex5 = D[ex2, H1] // Simplify
```

$$-\frac{1}{2\,G^2\,G1^4}\left(\frac{1}{\left(G1^2-H1^2\right)^{3/2}}4\,H\sqrt{G^2-H^2}\;\left(G1^2-2\,H1^2\right)\left(-2\,G1^2\,L1^2+2\,H1^2\,L1^2+\sqrt{G1^2-H1^2}\;\sqrt{G1^2-L1^2}\;\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)\mathrm{Cos}[h+h1]+2\,H1\left(G1^2-3\,L1^2\right)\left(G^2-3\,H^2+\left(G^2-H^2\right)\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]\right)\right)$$

```
ex6 = D[ex2, h1] // Simplify
```

$$\frac{1}{G^2\,G1^4}\left(G1^2\left(G^2-H^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)\mathrm{Sin}[2\,(h-h1)]+2\left(H\sqrt{G^2-H^2}\;H1\left(-2\sqrt{G1^2-H1^2}\;L1^2+\sqrt{G1^2-L1^2}\;\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)+\left(G^2-H^2\right)\left(-3\,H1^2\,L1^2+G1^2\left(H1^2+2\,L1^2\right)\right)\mathrm{Cos}[h+h1]\right)\mathrm{Sin}[h+h1]\right)$$

```
Collect[ex6,
 {Sin[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Sin[h + h1], Sin[2 (h + h1)], G}, Simplify]
```

$$\left(1-\frac{L1^2}{G1^2}+\frac{H^2\left(-1+\frac{L1^2}{G1^2}\right)}{G^2}\right)\mathrm{Sin}[2\,(h-h1)]+\frac{1}{G^2\,G1^4}2\,H\sqrt{G^2-H^2}\;H1\left(-2\sqrt{G1^2-H1^2}\;L1^2+\sqrt{G1^2-L1^2}\;\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)\mathrm{Sin}[h+h1]+\left(-\frac{2\,H^2\left(-3\,H1^2\,L1^2+G1^2\left(H1^2+2\,L1^2\right)\right)}{G^2\,G1^4}+\frac{-6\,H1^2\,L1^2+2\,G1^2\left(H1^2+2\,L1^2\right)}{G1^4}\right)\mathrm{Cos}[h+h1]\,\mathrm{Sin}[h+h1]$$

$$ex7 = \frac{\mu^2}{2\sigma^2 L^2} + \frac{\mu^4 (B-A)}{2\sigma^4 m_2 L^3 G^3}\left(1 - \frac{3}{4} ex2\right) - \frac{b\,\sigma^2}{4\mu^2} L^4 \left(5 - 3\frac{G^2}{L^2}\right)$$

$$\frac{\mu^2}{2 L^2 \sigma^2} - \frac{b\left(5 - \frac{3G^2}{L^2}\right) L^4 \sigma^2}{4\mu^2} + \frac{1}{2 G^3 L^3 \sigma^4 m_2}(-A+B)\,\mu^4 \Big(1 + \frac{1}{8 G^2 G1^4} 3 \big(-3 G^2 G1^4 + G1^4 H^2 + G^2 G1^2 H1^2 - 3 G1^2 H^2 H1^2 + G^2 G1^2 L1^2 - 3 G1^2 H^2 L1^2 - 3 G^2 H1^2 L1^2 + 9 H^2 H1^2 L1^2 - G1^2 (G^2 - H^2)(G1^2 - L1^2) \mathrm{Cos}[2h - 2h1] + 4 H \sqrt{G^2 - H^2}\, H1 \left(-2\sqrt{G1^2 - H1^2}\, L1^2 + \sqrt{G1^2 - L1^2}\sqrt{(G1^2 - H1^2)(G1^2 - L1^2)}\right) \mathrm{Cos}[h + h1] + G^2 G1^2 H1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)] - G1^2 H^2 H1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)] + 2 G^2 G1^2 L1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)] - 2 G1^2 H^2 L1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)] - 3 G^2 H1^2 L1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)] + 3 H^2 H1^2 L1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)]\big)\Big)$$

ex8 = D[ex7, L] // Simplify

$$-\frac{1}{2 L^4 \mu^2 \sigma^4}\Big(2 L \mu^4 \sigma^2 + 3 b G^2 L^5 \sigma^6 + 2 b L^5 (-3 G^2 + 5 L^2)\sigma^6 + \frac{1}{8 G^5 G1^4 m_2} 3 (A - B)\mu^6 \big(G^2 G1^4 - 3 G1^4 H^2 - 3 G^2 G1^2 H1^2 + 9 G1^2 H^2 H1^2 - 3 G^2 G1^2 L1^2 + 9 G1^2 H^2 L1^2 + 9 G^2 H1^2 L1^2 - 27 H^2 H1^2 L1^2 + 3 G1^2 (G^2 - H^2)(G1^2 - L1^2) \mathrm{Cos}[2(h - h1)] - 12 H \sqrt{G^2 - H^2}\, H1 \left(-2\sqrt{G1^2 - H1^2}\, L1^2 + \sqrt{G1^2 - L1^2}\sqrt{(G1^2 - H1^2)(G1^2 - L1^2)}\right)\mathrm{Cos}[h + h1] - 3 G^2 G1^2 H1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)] + 3 G1^2 H^2 H1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)] - 6 G^2 G1^2 L1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)] + 6 G1^2 H^2 L1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)] + 9 G^2 H1^2 L1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)] - 9 H^2 H1^2 L1^2 \mathrm{Cos}[2(h+h1)]\big)\Big)$$

Collect[ex8,
 {b, μ, Cos[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Cos[2 (h + h1)]}, Simplify]

$$-\frac{\mu^2}{L^3 \sigma^2} + \frac{b L (3 G^2 - 10 L^2)\sigma^2}{2\mu^2} + \mu^4 \Big(-\frac{3 (A - B)(G^2 - 3 H^2)(G1^2 - 3 H1^2)(G1^2 - 3 L1^2)}{16 G^5 G1^4 L^4 \sigma^4 m_2} - \frac{9 (A - B)(G^2 - H^2)(G1^2 - L1^2)\mathrm{Cos}[2(h - h1)]}{16 G^5 G1^2 L^4 \sigma^4 m_2} + \frac{1}{4 G^5 G1^4 L^4 \sigma^4 m_2} 9 (A - B) H \sqrt{G^2 - H^2}\, H1 \left(-2\sqrt{G1^2 - H1^2}\, L1^2 + \sqrt{G1^2 - L1^2}\sqrt{(G1^2 - H1^2)(G1^2 - L1^2)}\right)\mathrm{Cos}[h + h1] + \frac{9 (A - B)(G^2 - H^2)\left(-3 H1^2 L1^2 + G1^2 (H1^2 + 2 L1^2)\right)\mathrm{Cos}[2(h + h1)]}{16 G^5 G1^4 L^4 \sigma^4 m_2}$$

```
ex88 = D[ex7, l] // Simplify
```

0

```
Collect[ex88,
 {b, μ, Cos[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Cos[2 (h + h1)]}, Simplify]
```

0

```
ex9 = D[ex7, G] // Simplify
```

$$\frac{3\,b\,G\,L^2\,\sigma^2}{2\,\mu^2} - \Big(3\,(A-B)\,\mu^4\Big(G1^2\,(3\,G^2-5\,H^2)\,\sqrt{G^2-H^2}\,(G1^2-L1^2)\,\mathrm{Cos}[2\,(h-h1)] + 4\,H\,(-4\,G^2+5\,H^2)\,H1\,\Big(-2\,\sqrt{G1^2-H1^2}\,L1^2+\sqrt{G1^2-L1^2}\,\sqrt{(G1^2-H1^2)\,(G1^2-L1^2)}\Big)\,\mathrm{Cos}[h+h1] + \sqrt{G^2-H^2}\,\Big((G^2-5\,H^2)\,(G1^2-3\,H1^2)\,(G1^2-3\,L1^2) - (3\,G^2-5\,H^2)\,(-3\,H1^2\,L1^2+G1^2\,(H1^2+2\,L1^2))\,\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]\Big)\Big)\Big)\Big/\Big(16\,G^6\,G1^4\,\sqrt{G^2-H^2}\,L^3\,\sigma^4\,m_2\Big)$$

```
Collect[ex9,
 {b, μ, Cos[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Cos[2 (h + h1)]}, Simplify]
```

$$\frac{3\,b\,G\,L^2\,\sigma^2}{2\,\mu^2} + \mu^4\Big(-\frac{3\,(A-B)\,(G^2-5\,H^2)\,(G1^2-3\,H1^2)\,(G1^2-3\,L1^2)}{16\,G^6\,G1^4\,L^3\,\sigma^4\,m_2} - \frac{3\,(A-B)\,(3\,G^2-5\,H^2)\,(G1^2-L1^2)\,\mathrm{Cos}[2\,(h-h1)]}{16\,G^6\,G1^2\,L^3\,\sigma^4\,m_2} + \Big(3\,(A-B)\,H\,(4\,G^2-5\,H^2)\,H1\,\Big(-2\,\sqrt{G1^2-H1^2}\,L1^2+\sqrt{G1^2-L1^2}\,\sqrt{(G1^2-H1^2)\,(G1^2-L1^2)}\Big)\,\mathrm{Cos}[h+h1]\Big)\Big/\Big(4\,G^6\,G1^4\,\sqrt{G^2-H^2}\,L^3\,\sigma^4\,m_2\Big) + \frac{3\,(A-B)\,(3\,G^2-5\,H^2)\,(-3\,H1^2\,L1^2+G1^2\,(H1^2+2\,L1^2))\,\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]}{16\,G^6\,G1^4\,L^3\,\sigma^4\,m_2}\Big)$$

```
ex99 = D[ex7, g] // Simplify
```

0

```
Collect[ex99,
 {b, μ, Cos[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Cos[2 (h + h1)]}, Simplify]
```

0

ex10 =

$$\frac{1}{2A}G1^2+\frac{A-B}{2AB}L1^2+\frac{\mu^4 m_1 (B-A)}{2\sigma^3 (m_{10}+m_{20}) L^3 G^3}\left(1-\frac{3}{4}ex2\right)-\frac{b\sigma^2}{4\mu^2}L^4\left(5-3\frac{G^2}{L^2}\right)$$

$$\frac{G1^2}{2A}+\frac{(A-B)\,L1^2}{2AB}-\frac{b\left(5-\frac{3G^2}{L^2}\right)L^4\sigma^2}{4\mu^2}+$$
$$\frac{1}{2G^3L^3\sigma^3(m_{10}+m_{20})}(-A+B)\,\mu^4\left(1+\frac{1}{8G^2G1^4}\right.$$
$$3\left(-3G^2G1^4+G1^4H^2+G^2G1^2H1^2-3G1^2H^2H1^2+G^2G1^2L1^2-3G1^2H^2L1^2-\right.$$
$$3G^2H1^2L1^2+9H^2H1^2L1^2-G1^2\left(G^2-H^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)\mathrm{Cos}[2h-2h1]+$$
$$4H\sqrt{G^2-H^2}\,H1\left(-2\sqrt{G1^2-H1^2}\,L1^2+\right.$$
$$\left.\sqrt{G1^2-L1^2}\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)\mathrm{Cos}[h+h1]+$$
$$G^2G1^2H1^2\mathrm{Cos}[2(h+h1)]-G1^2H^2H1^2\mathrm{Cos}[2(h+h1)]+$$
$$2G^2G1^2L1^2\mathrm{Cos}[2(h+h1)]-2G1^2H^2L1^2\mathrm{Cos}[2(h+h1)]-$$
$$\left.\left.3G^2H1^2L1^2\mathrm{Cos}[2(h+h1)]+3H^2H1^2L1^2\mathrm{Cos}[2(h+h1)]\right)\right)m_1$$

ex11 = D[ex10, L1] // Simplify

$$\left(-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)L1+\left(3(-A+B)\,L1\,\mu^4\right.$$
$$\left(\left(G^2-3H^2\right)\left(G1^2-3H1^2\right)+G1^2\left(G^2-H^2\right)\mathrm{Cos}[2(h-h1)]-\frac{1}{\sqrt{G1^2-L1^2}}\right.$$
$$4H\sqrt{G^2-H^2}\,H1\left(2\sqrt{G1^2-H1^2}\sqrt{G1^2-L1^2}+\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)$$
$$\left.\mathrm{Cos}[h+h1]+\left(G^2-H^2\right)\left(2G1^2-3H1^2\right)\mathrm{Cos}[2(h+h1)]\right)$$
$$\left.m_1\right)\Big/\left(8G^5G1^4L^3\sigma^3(m_{10}+m_{20})\right)$$

Collect[ex11,
{b, μ, Cos[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Cos[2 (h + h1)]}, Simplify]

$$\left(-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)L1+\mu^4\left(\frac{3(-A+B)\left(G^2-3H^2\right)\left(G1^2-3H1^2\right)L1\,m_1}{8G^5G1^4L^3\sigma^3(m_{10}+m_{20})}+\right.$$
$$\frac{3(-A+B)\left(G^2-H^2\right)L1\,\mathrm{Cos}[2(h-h1)]\,m_1}{8G^5G1^2L^3\sigma^3(m_{10}+m_{20})}+\left(3(A-B)\,H\sqrt{G^2-H^2}\right.$$
$$H1\,L1\left(2\sqrt{G1^2-H1^2}\sqrt{G1^2-L1^2}+\sqrt{\left(G1^2-H1^2\right)\left(G1^2-L1^2\right)}\right)$$
$$\left.\mathrm{Cos}[h+h1]\,m_1\right)\Big/\left(2G^5G1^4L^3\sqrt{G1^2-L1^2}\,\sigma^3(m_{10}+m_{20})\right)+$$
$$\left.\frac{3(-A+B)\left(G^2-H^2\right)\left(2G1^2-3H1^2\right)L1\,\mathrm{Cos}[2(h+h1)]\,m_1}{8G^5G1^4L^3\sigma^3(m_{10}+m_{20})}\right)$$

```
ex111 = D[ex10, l1] // Simplify
```
0

```
Collect[ex111,
  {b, μ, Cos[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Cos[2 (h + h1)]}, Simplify]
```
0

```
ex12 = D[ex10, G1] // Simplify
```
$$\frac{G1}{A} + \Bigg(3\,(-A+B)\,\mu^4\,\Bigg(-2\,(G^2-3H^2)\,\left(-6\,H1^2\,L1^2+G1^2\,(H1^2+L1^2)\right) - 2\,G1^2\,(G^2-H^2)\,L1^2\,\mathrm{Cos}[2\,(h-h1)] + \Bigg(4\,H\,\sqrt{G^2-H^2}\,H1\,\Bigg(-G1^4\,\sqrt{G1^2-H1^2}\,\sqrt{G1^2-L1^2} - 4\,H1^2\,L1^2\left(\sqrt{G1^2-H1^2}\,\sqrt{G1^2-L1^2}+2\,\sqrt{(G1^2-H1^2)\,(G1^2-L1^2)}\right) + G1^2\left(2\,H1^2\,\sqrt{G1^2-H1^2}\,\sqrt{G1^2-L1^2}+3\,L1^2\left(\sqrt{G1^2-H1^2}\,\sqrt{G1^2-L1^2}+2\,\sqrt{(G1^2-H1^2)\,(G1^2-L1^2)}\right)\right)\Bigg)\,\mathrm{Cos}[h+h1]\Bigg)\Bigg/\left(\sqrt{G1^2-H1^2}\,\sqrt{(G1^2-H1^2)\,(G1^2-L1^2)}\right) - 2\,(G^2-H^2)\,\left(-6\,H1^2\,L1^2+G1^2\,(H1^2+2\,L1^2)\right)\,\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]\Bigg)\,m_1\Bigg)\Bigg/\left(16\,G^5\,G1^5\,L^3\,\sigma^3\,(m_{10}+m_{20})\right)$$

```
Collect[ex12,
  {b, μ, Cos[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Cos[2 (h + h1)]}, Simplify]
```
$$\frac{G1}{A} + \mu^4\Bigg(\frac{3\,(A-B)\,(G^2-3H^2)\,\left(-6\,H1^2\,L1^2+G1^2\,(H1^2+L1^2)\right)\,m_1}{8\,G^5\,G1^5\,L^3\,\sigma^3\,(m_{10}+m_{20})} + \frac{3\,(A-B)\,(G^2-H^2)\,L1^2\,\mathrm{Cos}[2\,(h-h1)]\,m_1}{8\,G^5\,G1^3\,L^3\,\sigma^3\,(m_{10}+m_{20})} + \Bigg(3\,(A-B)\,H\,\sqrt{G^2-H^2}\,H1\,\Bigg(G1^4\,\sqrt{G1^2-H1^2}\,\sqrt{G1^2-L1^2} + 4\,H1^2\,L1^2\left(\sqrt{G1^2-H1^2}\,\sqrt{G1^2-L1^2}+2\,\sqrt{(G1^2-H1^2)\,(G1^2-L1^2)}\right) - G1^2\left(2\,H1^2\,\sqrt{G1^2-H1^2}\,\sqrt{G1^2-L1^2}+3\,L1^2\left(\sqrt{G1^2-H1^2}\,\sqrt{G1^2-L1^2}+2\,\sqrt{(G1^2-H1^2)\,(G1^2-L1^2)}\right)\right)\Bigg)\,\mathrm{Cos}[h+h1]\,m_1\Bigg)\Bigg/\left(4\,G^5\,G1^5\,\sqrt{G1^2-H1^2}\,L^3\,\sqrt{(G1^2-H1^2)\,(G1^2-L1^2)}\,\sigma^3\,(m_{10}+m_{20})\right) + \left(3\,(A-B)\,(G^2-H^2)\,\left(-6\,H1^2\,L1^2+G1^2\,(H1^2+2\,L1^2)\right)\,\mathrm{Cos}[2\,(h+h1)]\,m_1\right)\Big/\left(8\,G^5\,G1^5\,L^3\,\sigma^3\,(m_{10}+m_{20})\right)\Bigg)$$

```
ex122 = D[ex10, g1] // Simplify
```
0

```
Collect[ex122,
  {b, μ, Cos[2 (h - h1)], Cos[h + h1], Cos[2 (h + h1)]}, Simplify]
```
0

ҚОСЫМША В

Коши есебінің бастапқы шарттары

Физикалық параметрлердің келесі мәндерін пайдаланамыз

$$\begin{aligned} &m_{10}=m_1\left(t_0\right)=1M_{\odot}, \quad m_{20}=m_2\left(t_0\right)=3\cdot 10^{-6}M_{\odot}, \\ &e=0,017, \quad a=1а.б. \end{aligned} \tag{В.1}$$

$$\begin{aligned} &A_0=0,3295\left(M_{\oplus}/M_{\odot}\right), \qquad C_0=0,3306\left(M_{\oplus}/M_{\odot}\right), \\ &\chi_1^2\left(t\right)=1+2\cdot 10^{-5}t, \qquad \chi_2^2\left(t\right)=1+2\cdot 10^{-6}t, \end{aligned} \tag{В.2}$$

Мұндағы $M_{\odot}$ – Күннің массасы, $M_{\oplus}$ – Жердің массасы. Делоне-Андуайе элементтер аналогтарының өлшемсіз бастапқы мәндері келесідей болады

$$\begin{aligned} &L^*=1, \qquad G^*=0,999, \qquad H^*=0,499, \\ &l^*=\frac{\pi}{4}, \qquad g^*=\frac{\pi}{18}, \qquad h^*=\frac{\pi}{9}, \end{aligned} \tag{В.3}$$

$$\begin{aligned} &L'^*=3.786, \qquad G'^*=4.372, \qquad H'^*=4.108, \\ &l'^*=\frac{\pi}{9}, \qquad g'^*=\frac{\pi}{3}, \qquad h'^*=\frac{\pi}{18}, \end{aligned} \tag{В.4}$$

Тұрақты масса жағдайында

$$\begin{aligned} &m_1\left(t\right)=\frac{m_{10}\left(t\right)}{\left(m_{10}^{1-n_1}-\alpha_1\left(1-n_1\right)t\right)^{\frac{1}{1-n_1}}}=1, \\ &m_2\left(t\right)=\frac{m_{20}\left(t\right)}{\left(m_{20}^{1-n_2}-\alpha_2\left(1-n_2\right)t\right)^{\frac{1}{1-n_2}}}=\frac{1}{332946}, \end{aligned} \tag{В.5}$$

$$\sigma\left(t\right)=\frac{m_1\left(t_0\right)+m_2\left(t_0\right)}{m_1\left(t\right)+m_2\left(t\right)}=1, \qquad b=\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma}=1, \tag{В.6}$$

Изотропты айнымалы масса жағдайында

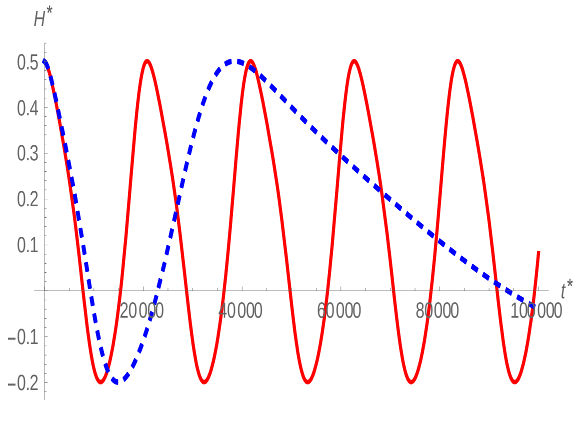
$$m_1(t)=\frac{m_{10}(t)}{\left(m_{10}^{1-n_1}-\alpha_1(1-n_1)t\right)^{\frac{1}{1-n_1}}}=\frac{1}{1+\dfrac{t}{100000}},$$

$$m_2(t)=\frac{m_{20}(t)}{\left(m_{20}^{1-n_2}-\alpha_2(1-n_2)t\right)^{\frac{1}{1-n_2}}}=\frac{1}{\sqrt{110853038916+\dfrac{t}{100000}}},\tag{B.7}$$

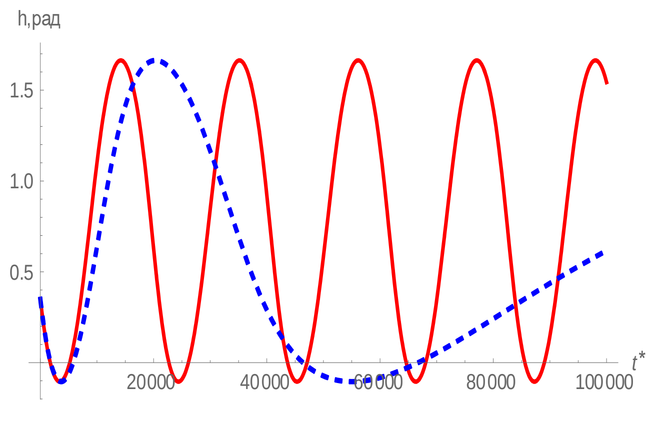
$$\sigma(t)=\frac{m_1(t_0)+m_2(t_0)}{m_1(t)+m_2(t)}=$$

$$=\frac{332947}{332946\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{t}{100000}+\dfrac{1}{\sqrt{110853038916+\dfrac{t}{100000}}}}\right)},\tag{B.8}$$

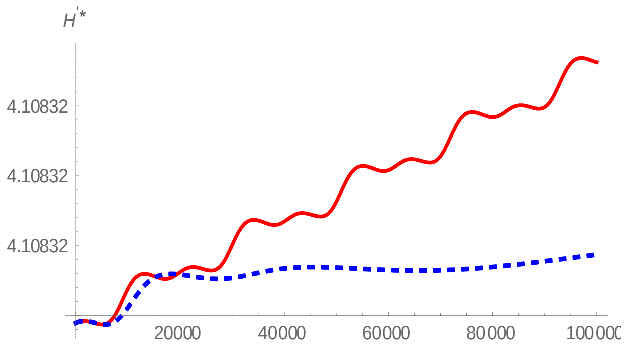
Ғасырлық ұйытқу теңдеулерінің графиктері, массалары тұрақты және айнымалы жағдайларды салыстыру



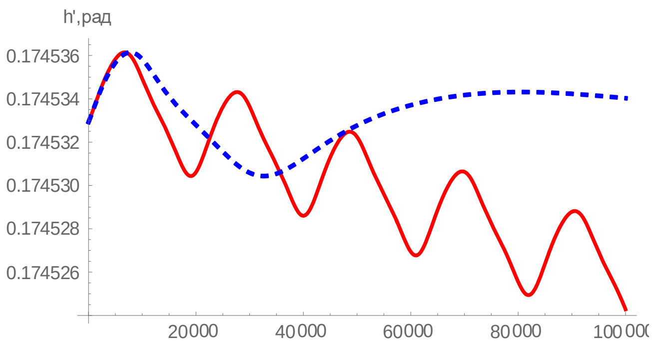
В.1-сурет. H^* элемент аналогы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса



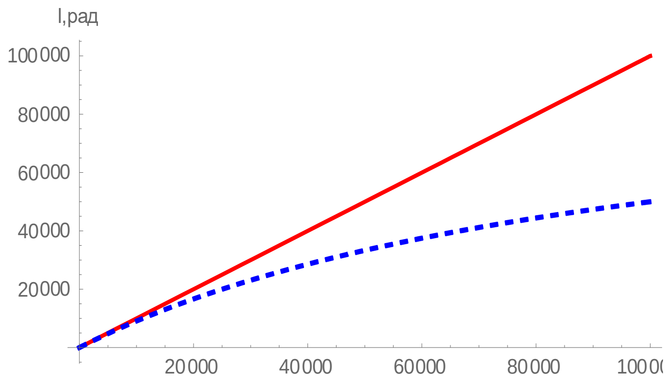
В.2-сурет. h^* элемент аналогы, үзік сызық – айнымалы масса, тұтас сызық – тұрақты масса



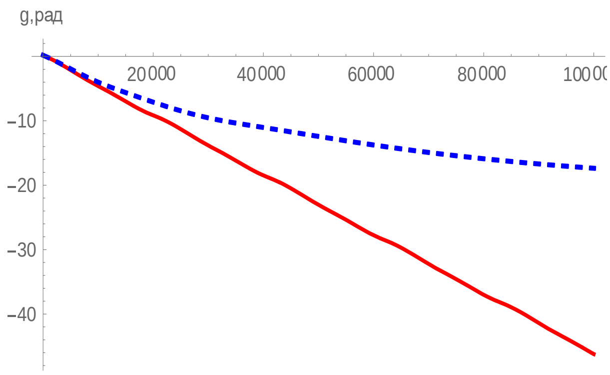
В.3-сурет. H'^{*} элемент аналогы,
үзік сызық – айнымалы масса,
тұтас сызық – тұрақты масса



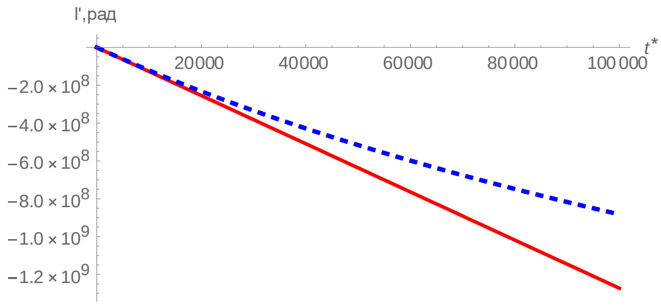
В.4-сурет. h'^{*} элемент аналогы,
үзік сызық – айнымалы масса,
тұтас сызық – тұрақты масса



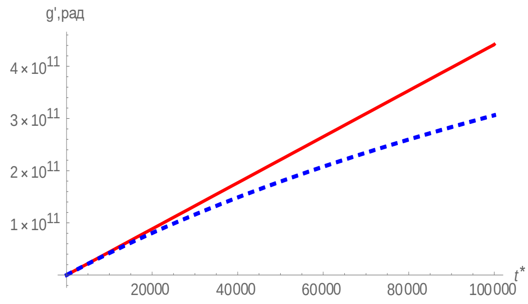
В.5-сурет. l^{*} элемент аналогы,
үзік сызық – айнымалы масса,
тұтас сызық – тұрақты масса



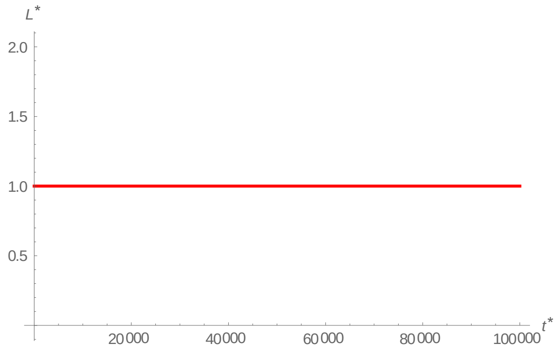
В.6-сурет. g^{*} элемент аналогы,
үзік сызық – айнымалы масса,
тұтас сызық – тұрақты масса



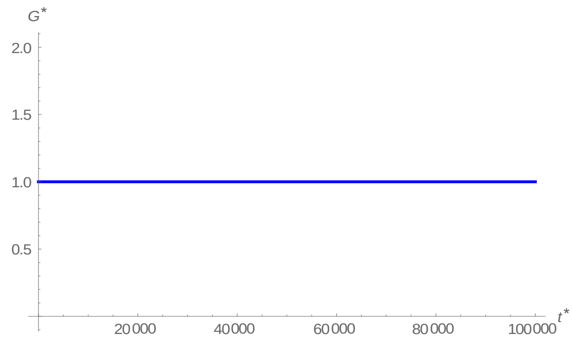
В.7-сурет. l'^{*} элемент аналогы,
үзік сызық – айнымалы масса,
тұтас сызық – тұрақты масса



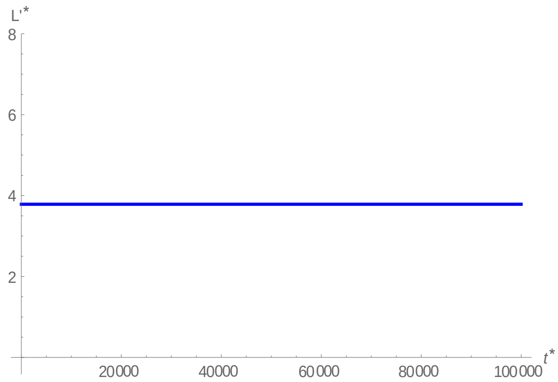
В.8-сурет. g'^{*} элемент аналогы,
үзік сызық – айнымалы масса,
тұтас сызық – тұрақты масса



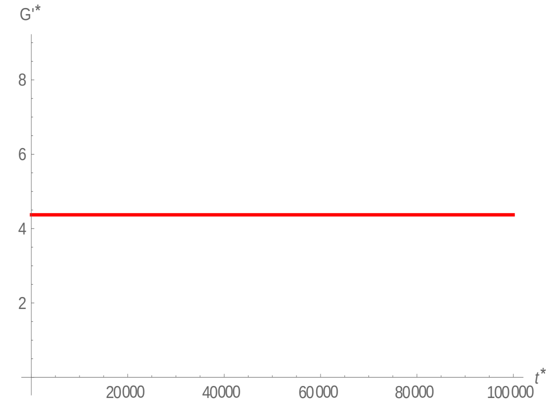
В.9-сурет. L^* элемент аналогының тұрақты болып сақталуы



В.10-сурет. G^* элемент аналогының тұрақты болып сақталуы



В.11-сурет. L'^* элемент аналогының тұрақты болып сақталуы



В.12-сурет. G'^* элемент аналогының тұрақты болып сақталуы